Singularidades Isoladas (continuação)

Seja $z=a$ uma singularidade isolada da função f. Se essa singularidade for removível então existe $r>0$ e uma função g analítica em $B(a,r)$ tal que $f(z)=g(z)$, $\forall z \in B(a,r)$, $z\neq a$. Em particular

$$\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} g(z) = g(a)$$

Logo, se o limite $\lim_{z\to a} f(z)$ for infinito ou não existir, essa singularidade não pode ser removível. Vamos dar nomes a esses dois casos.

<u>Definição</u>: Seja $z=a$ uma singularidade isolada da função f. Se $\lim_{z\to a}|f(z)|=\infty$ diremos que f tem um pólo em a, ou que a é um polo de f.

Se uma singularidade não é do tipo polo nem removível, ela será chamada de singularidade essencial.

<u>Exemplo 1</u>: $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)^n}$ tem uma singularidade isolada em $z=a$. Como $\lim_{z\to a}|f(z)|=\infty$, então a é um polo de f.

<u>Exemplo 2</u>: $g(z)=e^{1/z}$ tem uma singularidade isolada em $z=0$. Tomando $z_n=\dfrac{1}{2\pi n i}$ e $w_n=\dfrac{1}{(\frac{\pi}{2}+2\pi n)i}$ com $n\in\mathbb{N}$, teremos $\lim z_n=0$, $\lim w_n=0$, $g(z_n)=1$ e $g(w_n)=i$, $\forall n\in\mathbb{N}$, e portanto não existe $\lim_{z\to 0} g(z)$

Na verdade o resultado é bem mais impressionante. Seja $z_0\in\mathbb{C}$, $z_0\neq 0$, um número qualquer fixado e (r,θ) suas coordenadas polares ($r>0$ e $0\leq\theta<2\pi$)

Considere a sequência $z_n=\dfrac{1}{\log(r)+i(\theta+2\pi n)}$, com $n\in\mathbb{N}$ então $z_n\longrightarrow 0$ e

$$g(z_n)=\exp(\log(r)+i\theta+2\pi i n)=e^{\log(r)}e^{i\theta}e^{2\pi i n}=re^{i\theta}=z_0,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Em particular, $\overline{g(B(0,1)-\{0\})}=\mathbb{C}$.

Mostraremos adiante que toda singularidade essencial tem essa propriedade (fecho dando o plano complexo todo)

Proposição: Seja a um polo de f, então existe $r>0$, um inteiro $m>0$ e uma função analítica $g: B(a,r) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m} \quad , \forall z \neq a \text{ em } B(a,r)$$

Dem: Como $\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$ então $\lim_{z \to a} \frac{1}{f(z)} = 0$ e a função $\frac{1}{f(z)}$ tem uma singularidade removível em $z = a$. Logo $\exists r>0$ e uma função analítica $h: B(a,r) \to \mathbb{C}$ tal que $h(z) = (f(z))^{-1}$, $\forall z \neq a$ em $B(a,r)$

Note que h é analítica e $h(a) = 0$, logo $\exists m>0$ inteiro e uma função analítica $h_1: B(a,r) \to \mathbb{C}$ tal que

$$h(z) = (z-a)^m h_1(z) \quad \text{e} \quad h_1(a) \neq 0$$

Assim $f(z)(z-a)^m = \frac{1}{h_1(z)}$ e essa função tem uma singularidade removível em $z = a$, portanto existe $g: B(a,r) \to \mathbb{C}$ analítica tal que $g(z) = f(z)(z-a)^m$, o que conclui a prova. ∎

Definição: Se f tem um pólo em $z = a$, o menor inteiro positivo m para o qual $f(z)(z-a)^m$ tem uma singularidade removível em $z = a$ é chamado de ordem do polo.

Note que tal m satisfaz $\lim_{z \to a} (z-a)^m f(z) \neq 0$ e $\lim_{z \to a} (z-a)^{m+1} f(z) = 0$

Observação: De acordo com esse resultado, não existe uma função analítica que se aproxime de ∞ como uma potência fracionária de $(z-a)^{-1}$ numa vizinhança da singularidade isolada $z = a$

Por exemplo, se f é uma função analítica em uma bola aberta $B(0,r)$ e $|f(z)| \leq \frac{1}{|z|^{1/2}}$ então $\lim_{z \to 0} z f(z) = 0$ e a singularidade é removível, ou seja, f é limitada em $B(0,r)$

Se $z=a$ é um polo de ordem m da função f, então $\exists r>0$ e uma função analítica $g: B(a,r) \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-a)^m}$, $\forall z \neq a$. em $B(a,r)$.

Expandindo g em série de potências (com uma notação conveniente) temos

$$g(z) = A_m + A_{m-1}(z-a) + A_{m-2}(z-a)^2 + \dots + A_1 (z-a)^{m-1} + (z-a)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$$

e assim

$$f(z) = \underbrace{\frac{\overset{\neq 0}{A_m}}{(z-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(z-a)^{m-1}} + \frac{A_{m-2}}{(z-a)^{m-2}} + \dots + \frac{A_1}{(z-a)}}_{\text{parte singular } S(z)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k}_{\text{parte analítica } g_1(z)}$$

No caso particular em que $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ é uma função racional (quociente de polinômios), os polos de f são exatamente a ordem de cada um dos zeros de $q(z)$

Se a_1 é um zero de ordem m_1 de $q(z)$ então $q(z) = (z-a_1)^{m_1} q_1(z)$ e $q_1(a_1) \neq 0$. Tendo em vista a discussão logo acima, podemos escrever

$$f(z) = S_1(z) + g_1(z)$$

sendo $S_1(z)$ a parte singular de $f(z)$ em a e $g_1(z)$ analítica em uma bola centrada em a

Se a_2 é outro zero de $q(z)$, de ordem m_2, então também é zero de $q_1(z)$ (de mesma ordem) e $q_1(z) = (z-a)^{m_2} q_2(z)$ com $q_2(a_2) \neq 0$

Logo $g_1(z) = S_2(z) + g_2(z)$ sendo $S_2(z)$ a parte singular de $g_1(z)$ em a_2 (e portanto de f nesse ponto) e $g_2(z)$ uma função (racional) analítica numa bola centrada em a_2; logo

$$f(z) = S_1(z) + S_2(z) + g_2(z)$$

Por indução concluímos que: se $a_1, a_2, \dots, a_n$ são polos de $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ e $S_j(z)$ é a parte singular de f em cada $z = a_j$ então

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n} S_j(z) + g_n(z)$$

sendo $g_n(z)$ uma função racional sem polos. Pelo teorema fundamental da algebra, uma função racional sem polos é um polinômio e a expressão acima é a expansão de f em frações parciais.

Se f é uma função analítica com um número finito de singularidades isoladas (polos e removíveis) em seu domínio, podemos replicar o resultado acima.

Caso f tenha uma infinidade de polos, a resposta virá do Teorema de Mittag-Leffler que veremos adiante.

Teorema (Casorati - Weierstrass)

Se f tem uma singularidade essencial em $z=a$ e é uma função analítica no anel $A=\{z\in\mathbb{C};\ 0<|z-a|<r\}$ então $f(A)=\{f(z);\ z\in A\}$ é denso em $\mathbb{C}$, ou seja, $\overline{f(A)}=\mathbb{C}$

Dem: Precisamos provar que dados $z_0\in\mathbb{C}$ e $\varepsilon>0$ quaisquer, existe $\delta>0$ e $z\in A$ tal que $|z-a|<\delta$ e $|f(z)-z_0|<\varepsilon$.

Suponha que isso é falso, ou seja, que $\exists z_0\in\mathbb{C}, \exists\varepsilon>0, \forall z\in A$ tem-se $|f(z)-z_0|\geq\varepsilon$. Nesse caso

$$\lim_{z\to a}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-a|}\geq\lim_{z\to a}\frac{\varepsilon}{|z-a|}=\infty$$

ou seja, $\dfrac{f(z)-z_0}{z-a}$ tem um polo em $z=a$.

Se m é a ordem desse polo então $\lim_{z\to a}|z-a|^{m+1}|f(z)-z_0|=0$ e portanto

$$|z-a|^{m+1}|f(z)|\leq|z-a|^{m+1}(|f(z)-z_0|+|z_0|$$
$$=|z-a|^{m+1}|f(z)-z_0|+|z-a|^{m+1}|z_0|$$

e

$$\lim_{z\to a}|(z-a)^{m+1}f(z)|=0$$

ou seja, $(z-a)^m f(z)$ tem uma singularidade removível em $z=0$, o que contradiz a hipótese. ■