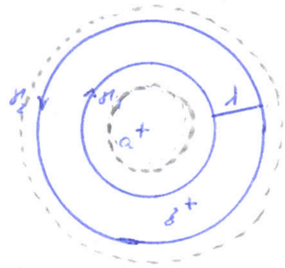
Expansão de Laurent

Fixados $a \in \mathbb{C}$ e $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$, considere o anel

$$A(a;R_1,R_2) = \{ z \,;\, R_1 < |z-a| < R_2 \}$$

Suponha que f é analítica em $A(a,R_1,R_2)$ e fixemos um ponto z neste anel. Tomemos também r_1 e r_2 positivos tais que $R_1 < r_1 < |z| < r_2 < R_2$ e considere o anel fechado $\overline{A(a,r_1,r_2)}$ cuja fronteira é formada pelos círculos γ_1 e γ_2 indicados na figura ao lado.



Observe que a função $g(w) = \dfrac{f(w)}{w-z}$ é analítica no anel $A(a,R_1,R_2)$, exceto no ponto z, e o caminho $\gamma = \gamma_2 + \lambda - \gamma_1 - \lambda$ é uma curva fechada, suave por partes, envolvendo z uma única vez, logo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw}_{f_2(z)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw}_{f_1(z)}$$

$$= f_1(z) + f_2(z)$$

A função f é analítica para $R_1 < |z-a| < R_2$, logo podemos expandí-la em série de potências com raio de convergência R_2, ou seja

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{para} \quad |z-a| < R_2$$

sendo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

O problema é que não podemos usar esse teorema de representação em série para f_2, pois a função é analítica para $|z-a| > R_1$. A ideia aqui é adaptar a demonstração desse teorema. Nesse caso.

$$\left| \frac{w-a}{z-a} \right| = \frac{r}{|z-a|} < 1 \quad , \ \forall\, w \in \gamma_1$$

logo

$$\frac{1}{w-z} = \frac{-1}{z-a-(w-a)} = \frac{-1}{z-a}\,\frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}}$$

$$= \frac{-1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n}$$

Multiplicando os extremos por $\frac{-f(w)}{2\pi i}$ e integrando sobre γ_1 temos

$$f_2(z) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n}f(w)\,dw$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}f(w)(w-a)^{n-1}\,dw\right)(z-a)^{-n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{-n}(z-a)^n$$

sendo $\quad a_{-n} = b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw \;, n\in\mathbb{N}$

Teorema: Seja f uma função analítica no anel $A(a; R_1, R_2)$, então

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

sendo essa convergência absoluta e uniforme em qualquer anel fechado $\overline{A(a; r_1, r_2)}$ com $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. Além disso,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \quad , \forall n\in\mathbb{Z}$$

em qualquer círculo $\gamma: |z-a| = r$ com $R_1 < r < R_2$, e essa série é única.

Exemplos: $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$ em torno de $z=0$

$$\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=-2}^{\infty} z^n \quad \text{converge para } 0<|z|<1$$

Mas também temos uma singularidade em $z=1$, logo faz sentido querer expandir em torno de $z=1$

$$\frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{-1}{z-1}\,\frac{1}{z^2} = \frac{1}{z-1}\,\frac{-1}{(1+(z-1))^2}$$

Vamos obter a série de $G(z)=\frac{1}{1+(z-1)}$ e derivar gerando a série de $G'(z)=\frac{-1}{(1+(z-1))^2}$. Assim

$$G(z) = \frac{1}{1-[-(z-1)]} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad , \; 0<|z-1|<1$$

e

$$G'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (z-1)^{n-1} \quad , \; 0<|z-1|<1$$

Assim $$\frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (z-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (z-1)^{n-2}$$

Corolário: Seja $z=a$ uma singularidade isolada de f e $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ sua expansão de Laurent no anel $A(a;0,R)$, então

(i) $z=a$ é uma singularidade removível $\iff a_n=0, \forall n\leq -1$

(ii) $z=a$ é um polo de ordem $m \iff a_{-m}\neq 0$ e $a_n=0, \forall n<-m$

(iii) $z=a$ é uma singularidade essencial $\iff a_n\neq 0$ para uma infinidade de inteiros negativos n.

Dem: (i) Se $a_n=0$, $\forall n<0$ então $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ é analítica em $B(a,R)$ e coincide com f em $B(a,R)-\{a\} \Rightarrow z=a$ é singularidade removível. Por outro lado, se $z=a$ é removível então $f(z)=g(z)$ para $z\neq a$ em uma vizinhança de $z=a$. Pela unicidade de representação em série de Laurent, os coeficientes da série de potências de f devem ser os mesmos da série de g, ou seja, $a_n=0$, $\forall n<0$.

(ii) Suponha $a_n=0$, $\forall n<m$, então a expansão de Laurent da função $(z-a)^m f(z)$ não tem potências negativas de $(z-a)$. Logo pela parte (i) a função $(z-a)^m f(z)$ tem uma singularidade removível em $z=a$, ou seja, um polo em $z=a$. A recíproca usa os mesmos argumentos na ordem inversa.

(iii) Se f é essencial então não é polo nem removível, logo esse caso segue das negações de (i) e (ii).