Aula 13
01
28/01/16

Ciclos Homólogos

Um ciclo no plano complexo é uma sequência finita de caminhos fechados em $\mathbb{C}$. Se $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ são caminhos fechados, usaremos as seguintes notações:

um ciclo: $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$; o ciclo: $-\gamma = (-\gamma_1, -\gamma_2, \ldots, -\gamma_n)$

a imagem de γ: $\{\gamma\} = \{\gamma_1\} \cup \{\gamma_2\} \cup \cdots \cup \{\gamma_n\}$

Quando $\{\gamma\} \subset G$, sendo $G \subset \mathbb{C}$ um subconjunto qualquer, dizemos que γ é um ciclo em G.

Um ciclo é suave por partes se cada uma das curvas fechadas que o compõe for suave por partes.

A integral de uma função f sobre um ciclo $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ é

$$\int_\gamma f = \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f$$

e o índice de um ciclo $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ em um ponto $a \in \mathbb{C}$ é

$$n(\gamma; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - a}$$

logo

$$n(\gamma; a) = \sum_{j=1}^{m} n(\gamma_j; a)$$

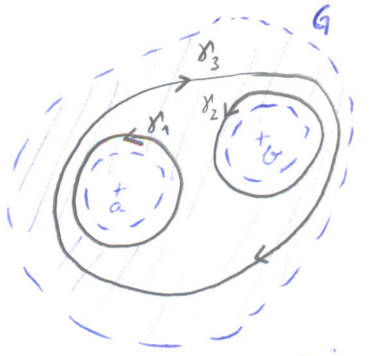
Dizemos que os ciclos γ e σ em G são homólogos em G se

$$n(\sigma, z) = n(\gamma; z), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus G$$

e denotamos isso por $\gamma \approx \sigma$.

Em especial, dizemos que γ é homólogo a zero ($\gamma \approx 0$) em G quando

$$n(\gamma; z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus G.$$



abertos G com dois buracos

exemplo: note que $n(\gamma_1; a) = 1$, $n(\gamma_1, b) = 0$
e $n(\gamma_3; a) = -1$.

- $\gamma_j \not\approx \gamma_k$ para $j \neq k$
- $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \approx 0$

Com essa notação de ciclo podemos enunciar a fórmula integral de Cauchy e o teorema de Cauchy de forma mais compacta:

Teorema: (Fórmula integral de Cauchy) Seja $G \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f: G \to \mathbb{C}$ uma função analítica. Se γ é um ciclo em G homólogo a zero, então

$$f(a)\, \eta(\gamma; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\, dz, \quad \forall a \in G - \{\gamma\}$$

Obs: Compare essa versão com o teorema 5.6 da página 85.

Teorema de Cauchy: Com as mesmas hipóteses acima

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0.$$

Corolário: Com as mesmas hipóteses acima

$$f^{(k)}(a)\, \eta(\gamma; a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\, dz, \quad \forall a \in G - \{\gamma\}$$

Contando zeros de funções analíticas

Se uma função analítica $f: G \to \mathbb{C}$ possui um zero no ponto $z = a$, já mostramos que existe uma função analítica $g: G \to \mathbb{C}$ e $m > 0$ inteiro tal que

$$f(z) = (z-a)^m g(z) \quad \text{e} \quad g(a) \neq 0$$

Se $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ são os zeros de $f: G \to \mathbb{C}$ analítica (sendo os zeros a_k repetidos de acordo com sua multiplicidade na sequência acima), então podemos escrever

$$f(z) = (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_m)\, g(z)$$

sendo $g: G \to \mathbb{C}$ analítica e $g(z) \neq 0$, $\forall z \in G$. Logo

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a_1} + \frac{1}{z-a_2} + \cdots + \frac{1}{z-a_m} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad , \forall z \in G - \{a_j\}_{j=1}^{n}$$

Como $g(z) \neq 0$, $\forall z \in G$ então a função $z \in G \longmapsto g'(z)/g(z)$ é analítica em G. Se $\gamma \approx 0$ então, pelo teorema de Cauchy temos

$$\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0 \qquad e \qquad \int_\gamma \frac{dz}{z-a_k} = n(\gamma; a_k)$$

isso prova o seguinte teorema

Teorema: Seja $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica na região $G \subset \mathbb{C}$, com zeros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (repetidos de acordo com sua multiplicidade) e γ é um ciclo em G homólogo a zero que não passa por nenhum dos zeros de f então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^{m} n(\gamma; a_k)$$

Corolário: Com as mesmas hipóteses acima, exceto que os pontos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ são zeros de $f(z) - \alpha = g(z)$, temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-\alpha} dz = \sum_{k=1}^{m} n(\gamma; a_k)$$

exemplo: $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{2z}{z^2+1} dz = 4\pi i$

Resíduos

A pergunta que motiva o estudo que faremos a seguir é a seguinte:

"Se f possui uma singularidade no ponto $z=a$ e γ é um ciclo homólogo a zero, quais são os possíveis valores que $\int_\gamma f$ pode assumir, supondo obviamente que γ não passa por a?"

Claramente se $z=a$ for removível, a resposta é $\int_\gamma f = 0$. Porém quando a é um polo ou uma singularidade essencial e a resposta torna-se bem mais interessante. Basta ver o último teorema que provamos acima.

Agora, recordemos que quando f possui uma singularidade isolada no ponto $z=a$, podemos obter a expansão de Laurent de f em um anel $A(a,R_1,R_2)$

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$$

sendo os coeficientes

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

e γ é um círculo $|z-a|=r$, com $R_1<r<R_2$.

Em particular, para $n=-1$ temos

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1}$$

Chamaremos de resíduo de f no ponto $z=a$ o coeficiente a_{-1} da série de Laurent em torno de a

$$Res(f;a) = a_{-1}$$

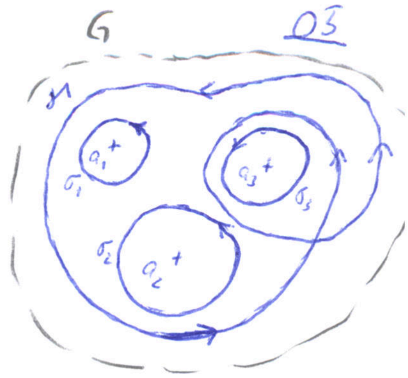
e dessa forma

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\, Res(f;a)$$

caso a seja a única singularidade de f no anel $A(a,R_1,R_2)$.
O resultado preciso é o seguinte:

Teorema do Resíduo: Seja $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica na região $G\subset\mathbb{C}$, exceto pelas singularidades isoladas $a_1,\dots,a_n$. Se γ é um ciclo em G que não passa por nenhum dos pontos a_j e se $\gamma\approx 0$ em G então

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} n(\gamma;a_k)\,Res(f;a_k)$$



Dem: Podemos supor, sem perda de generalidade, que o ciclo γ é composto de uma única curva fechada suave.

Vamos denotar $G_0 = G - \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e $n_j = n(\gamma; a_j)$, para $1 \le j \le n$.

Como $G_0 - \{\gamma\}$ também é um conjunto aberto, para cada j podemos escolher um $r_j > 0$ tal que $B(a_j, r_j) \subset G_0 - \{\gamma\}$ e $B(a_j, r_j) \cap B(a_k, r_k) = \emptyset$, para todo j, k com $1 \le j, k \le n$ e $j \ne k$.

Agora, para cada $j = 1, 2, \dots, n$, seja γ_j a fronteira de $B(a_j, r_j)$ orientada no sentido positivo, que podemos parametrizar por

$$\sigma_j(t) = a_j + r_j e^{2\pi i t}, \quad 0 \le t \le 1$$

e considere o ciclo

$$\sigma = (\underbrace{\sigma_1, \sigma_1, \dots, \sigma_1}_{n_1 \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{\sigma_n, \dots, \sigma_n}_{n_n \text{ vezes}}, -\gamma)$$

Afirmação: $\sigma \approx 0$

De fato, se $z \notin G_0$, temos duas situações:

(1º) $z = a_j$, para algum $j = 1, 2, \dots, n$.

Como $n(\sigma_j, a_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \ne k \end{cases}$ e $n(\gamma, a_j) = n_j$ então

$n(\sigma, a_j) = n_j - n_j = 0$

(2º) $z \ne a_j$, $\forall j = 1, 2, \dots, n$

Como $z \notin G$ e $\gamma \approx 0$ em G por hipótese então $n(\sigma, A) = 0$

Isso conclui a prova da afirmação

Para concluir a demonstração do teorema, note que f é analítica em G_0, logo pelo teorema de Cauchy

$$0 = \int_\sigma f = \sum_{k=1}^{n} n_k \int_{\gamma_k} f - \int_\gamma f \Rightarrow \int_\gamma f = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} n(\gamma; a_k) \operatorname{Res}(f; a_k)$$

■

Suponha que f tem um polo de ordem $m \ge 1$ no ponto $z = a$. Então existe uma função analítica g numa vizinhança de a tal que $g(z) = (z-a)^m f(z)$ e $g(a) \ne 0$.

Seja $g(z) = b_0 + b_1(z-a) + \cdots + b_{m-1}(z-a)^{m-1} + \sum_{j=m}^{\infty} b_j (z-a)^j$ a expansão de g em série de potências.

Então próximo de a, mas para $z \neq a$, temos

$$f(z) = \frac{b_0}{(z-a)^m} + \frac{b_1}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{(z-a)} + \sum_{k=0}^{\infty} b_{m+k}(z-a)^k$$

que é a expansão de Laurent em um disco perfurado em torno de $z=a$, logo

$$Res(f;a) = b_{m-1}$$

Em particular, se $z=a$ é um polo simples, então

$$Res(f;a) = g(a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$$

Isso prova o seguinte teorema.

<u>Teorema</u>: Se f tem um polo de ordem m no ponto $z=a$ e $g(z) = (z-a)^m f(z)$ próximo de a, então

$$Res(f;a) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a)$$