Aula 17
01
05/02

Funções Harmônicas

Seja G uma região do plano complexo e $f = u + iv$ uma função analítica em G. Neste caso valem as equações de Cauchy-Riemann

(1) $\quad u_x = v_y \quad$ e $\quad u_y = -v_x \quad$ em G

Como f possui derivadas de todas as ordens, então u e v possuem derivadas de todas ordens, em particular, as derivadas de segunda ordem são todas contínuas. Logo derivando (1) acima parcialmente temos

$$u_{xy} = v_{yy} \qquad u_{yx} = -v_{xx}$$
$$u_{xx} = v_{yx} \qquad u_{yy} = -v_{xy}$$

Como as derivadas mistas são iguais, os pares de equações (por linha) acima fornecem

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{e} \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad , \forall (x,y) \in G$$

Definição: Seja $u = u(x,y)$ uma função real definida em uma região $G \subset \mathbb{R}^2$. Dizemos que u é harmônica se as derivadas de segunda ordem de u são contínuas e u satisfaz a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad , \forall (x,y) \in G$$

O operador diferencial $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ é chamado de Laplaciano ou operador de Laplace.

Obs: Os cálculos acima mostram que se $f: G \to \mathbb{C}$ é analítica então $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$ são funções harmônicas

Definição: Seja $u = u(x,y)$ uma função harmônica na região $G \subset \mathbb{C}$, diremos que $v = v(x,y)$ é a função harmônica conjugada de u em G se existir uma função analítica $f: G \to \mathbb{C}$ tal que $f = u + iv$

Obs: Se v é conjugada harmônica de u em G então $f = u + iv$ é analítica $\Rightarrow if = -v + iu$ é analítica $\Rightarrow u$ é conjugada harm. de $-v$.

Obs: A equação de Laplace fornece uma condição necessária para que uma função qualquer seja parte real ou imaginária de uma função analítica.

Por exemplo, $u(x,y)=x^2+y^2$ não pode ser parte real de uma função analítica, pois $\Delta u(x,y)=4\neq 0$

Teorema: Seja G uma região simplesmente conexa de $\mathbb{C}$ e $u=u(x,y)$ uma função harmônica em G. Então existe $f: G\to\mathbb{C}$ analítica tal que $\mathrm{Re}\, f = u$ em G.

Dem. Defina $\varphi(x,y)=u_x(x,y)-i\,u_y(x,y)$, $\forall (x,y)\in G$ então

$\mathrm{Re}\,\varphi = u_x$ e $\mathrm{Im}\,\varphi = -u_y$ então

$(\mathrm{Re}\,\varphi)_x-(\mathrm{Im}\,\varphi)_y = u_{xx}-(-u_{yy}) = u_{xx}+u_{yy}=\Delta u = 0$ e

$(\mathrm{Re}\,\varphi)_y+(\mathrm{Im}\,\varphi)_x = u_{xy}+(-u_{yx})=0$, pois u tem derivadas mistas contínuas.

Logo $\varphi=\varphi(x,y)$ satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em G e as funções $(\mathrm{Re}\,\varphi)_x$, $(\mathrm{Re}\,\varphi)_y$, $(\mathrm{Im}\,\varphi)_x$ e $(\mathrm{Im}\,\varphi)_y$ são todas contínuas, portanto φ é analítica em G

Como G é simplesmente conexo, existe uma função analítica $\Phi: G\to\mathbb{C}$ tal que

$$\Phi'(z)=\varphi(z)=u_x(z)-i\,u_y(z),\ \forall z\in G \qquad (A)$$

Mas também temos $\Phi=\mathrm{Re}\,\Phi + i\,\mathrm{Im}\,\Phi$, logo $\forall z\in G$ temos

$$\Phi'(z)=(\mathrm{Re}\,\Phi)_x+i(\mathrm{Im}\,\Phi)_x = (\mathrm{Re}\,\Phi)_x - i(\mathrm{Re}\,\Phi)_y \qquad (B)$$

De (A) e (B) temos

$$u_x=(\mathrm{Re}\,\Phi)_x \quad e \quad u_y=(\mathrm{Re}\,\Phi)_y,\ \forall z\in G$$

logo existe uma constante <u>real</u> c tal que

$$\mathrm{Re}\,\Phi(z)=u(z)+c,\ \forall z\in G$$

Conclusão: $f(z)=\Phi(z)-c$ é analítica em G e $\mathrm{Re}\,f=\mathrm{Re}\,\Phi - c = u$ o que conclui a prova do teorema. ∎

Corolário: Se u é harmônica na região G simplesmente conexa então existe uma função analítica f em G com $\operatorname{Im} f = u$

Basta ver que o teorema garante a existência de g, analítica em G, tal que $\operatorname{Re} g = u$. Tomando $f = ig$ teremos f analítica em G com $\operatorname{Im} f = u$.

Observação: A hipótese de G ser simplesmente conexa não pode ser descartada.

De fato, suponha que pudéssemos omiti-la do enunciado e considere a função

$$u(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

É fácil verificar que $\Delta u(x,y) = 0$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$ e que u possui derivadas de segunda ordem contínuas em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, logo u é harmônica em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Pelo teorema (que estamos supondo válido mesmo quando G tem um buraco), existe uma função analítica f em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ tal que

$$f(z) = \log\sqrt{x^2+y^2} + i\, v(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

Considere agora a função $h: \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$h(z) = z\, e^{-f(z)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

então h é analítica e

$$|h(z)| = |z\, e^{-\log\sqrt{x^2+y^2}}\, e^{-iv(z)}| = |z|\, e^{\log(x^2+y^2)^{-1/2}} = |z|\frac{1}{|z|} = 1$$

Como h é uma função analítica com módulo constante então h é constante, em particular, tem derivada nula, ou seja

$$0 = h'(z) = e^{-f(z)} + z\, e^{-f(z)}(-f'(z)) = e^{-f(z)}(1 - z f'(z))$$

Como $e^{-f(z)} \neq 0$, $\forall z$ então $1 - z f'(z) = 0 \Rightarrow f'(z) = 1/z$, $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

Como a função $1/z$ não tem primitiva em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, chegamos a uma contradição.

Conclusão: A hipótese "G simplesmente conexo" não pode ser descartado.

Teorema: Toda função harmônica limitada em $\mathbb{C}$ é constante.

Dem: Seja u uma função harmônica limitada em $\mathbb{C}$, então pelo teorema anterior existe uma função inteira f tal que $Re\, f = u$.

Considere a função $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = e^{f(z)}$, $z \in \mathbb{C}$.
Então g é inteira e

$$|g(z)| = |e^{Re\, f(z) + i\, Im\, f(z)}| = e^{u(z)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Como u é limitada em $\mathbb{C}$ então g é limitada em $\mathbb{C}$. Segue do Teorema de Liouville que g é constante $\Rightarrow u$ é constante. ■

Proposição: Se u é harmônica em G simplesmente conexo então $u \in C^{\infty}(G)$

(exercício)

Teorema do Valor Médio: Se u é uma função harmônica em G e $\overline{B}(a,r) \subset G$ então

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})\, d\theta$$

Dem: Seja $R > r$ tal que $B(a,R) \subset G$. Como $B(a,R)$ é simplesmente conexo, existe uma função analítica nessa bola tal que $Re\, f = u$.

Segue da fórmula integral de Cauchy que (para $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$)

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})\, re^{it} i}{a + re^{it} - a}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt.$$

Tomando a parte real na fórmula acima, segue o resultado. ■

Def. Dizemos que a função contínua $u: G \to \mathbb{R}$ tem a propriedade do valor médio (PVM) em G se $\forall r > 0$ tal que $\overline{B}(a,r) \subset G$ tivermos

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})\, d\theta$$

Princípio do Máximo: Seja G uma região de $\mathbb{C}$ e $u = u(x,y)$ uma função real contínua em G que tem a (PVM).
Se existir $a \in G$ tal que

$$u(a) \geq u(z), \ \forall z \in G$$

então u é constante.

Dem: Seja $A = \{z \in G; u(z) = u(a)\}$. Como u é contínua e $A = u^{-1}(\{u(a)\})$ então A é fechado em G.

Vamos provar que A também é aberto em G, pela conexidade de G teremos $A = G$ e portanto $u(z) = u(a)$, $\forall a \in G$.

Seja $z_0 \in A$ um ponto qualquer e $r_0 > 0$ tal que $\overline{B}(z_0, r_0) \subset G$
Suponha que exista $b \in B(z_0, r_0)$ com $u(b) \neq u(a)$. Como $u(a) = \max\{u(z); z \in G\}$ então

$$u(b) < u(a) = u(z_0)$$

Por continuidade, existe $\delta > 0$ tal que

$$u(z) < u(a) = u(z_0), \ \forall z \in B(b; \delta)$$

Tomando $\rho = |z_0 - b|$ então $b = \rho e^{i\beta}$, para algum $\beta \in [0, 2\pi]$

Note que, existe um intervalo $I \subsetneq [0, 2\pi]$ no qual

(★) $u(z_0 + \rho e^{i\theta}) < u(z_0)$, $\forall \theta \in I$

Basta tomar θ de modo que $z_0 + \rho e^{i\theta} \in B(b, \delta)$

Agora, pela (PVM) temos

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]\setminus I} \cdots + \frac{1}{2\pi}\int_I$$

$$\overset{\text{HIPÓTESE}}{\leq} \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]\setminus I} u(z_0)\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_I u(z_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta$$

$$\overset{(★)}{<} \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]\setminus I} u(z_0)\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_I u(z_0)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} u(z_0) \int_0^{2\pi} d\theta = u(z_0)$$

ou seja $u(z_0) < u(z_0)$ (contradição).

Isso prova que $B(z_0, r) \subset A \Rightarrow A$ é aberto. ∎