Núcleo de Poisson

Chamaremos de núcleo de Poisson a função

(1) $$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\theta}, \quad 0 \le r < 1 \text{ e } \theta \in \mathbb{R}$$

Começamos observando que escrevendo $z = re^{i\theta}$ teremos

$$\frac{1+z}{1-z} = (1+z)\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

logo

(2) $$\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta}$$

e

$$Re\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = 1 + \cancel{2}\sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{\cancel{2}}$$

$$= r^0 e^{i0\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-in\theta}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = P_r(\theta)$$

isto é

(3) $$\boxed{Re\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) = P_r(\theta)}$$

Além disso,

$$\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} = \frac{(1+re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})} = \frac{1+re^{i\theta}-re^{-i\theta}-r^2e^{i\theta}e^{-i\theta}}{|1-re^{i\theta}|^2}$$

como

$$|1-re^{i\theta}|^2 = (1-r\cos\theta)^2 + (r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2$$

$$= 1 - 2r\cos\theta + r^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\theta$$

$$= 1 - 2r\cos\theta + r^2$$

e

$$re^{i\theta} - re^{-i\theta} = 2ir\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = i(2r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

logo

(4) $$\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} + i\,\frac{2r\,\mathrm{sen}\,\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

e portanto, de (3) e (4) temos

(5) $$\boxed{P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}}, \quad 0\leq r<1 \text{ e } \theta\in\mathbb{R}$$

<u>Teorema</u>: O núcleo de Poisson possui as seguintes propriedades

(a) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)d\theta = 1$ (média 1)

(b) $P_r(\theta)>0$, $\forall\theta\in\mathbb{R}$ (positiva)

(c) $P_r(-\theta) = P_r(\theta)$, $\forall\theta\in\mathbb{R}$ (par)

(d) $P_r(\theta+2\pi) = P_r(\theta)$, $\forall\theta\in\mathbb{R}$ (2π-periódica)

(e) $P_r(\theta)<P_r(\delta)$, se $0<\delta<\theta<\pi$ (decrescente em θ)

(f) $\lim_{r\to1^-} P_r(\theta) = 0$ uniformemente em $[-\pi,\pi]-(-\delta,\delta)$, $\forall\delta>0$.

<u>Dem</u>: As provas de (b), (c) e (d) seguem direto da fórmula (5), logo falta provar (a), (e) e (f).

(a) Observe que a série que define $P_r(\theta)$ converge uniformemente em r $(0\leq r<1)$ logo

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)d\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}d\theta = 1, \text{ pois}$$

para $\underset{=1}{n}\neq0$ temos $\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}d\theta = \left.\frac{e^{in\theta}}{in}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$, e para $n=0$ temos $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i0\theta}d\theta = 2\pi$.

(e) Considere a função $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ definida por $f(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}$ como

$$f'(t) = -(1-r^2)(1-2r\cos t+r^2)^{-2}(2r\,\text{sen}\,t)<0, \quad \forall t\in(0,\pi)$$

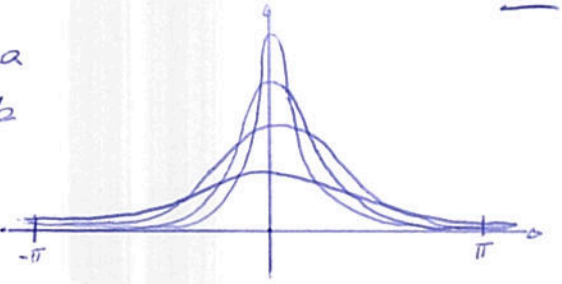
isso garante que f é decrescente em $(0,\pi)$, em particular, para

$$0<\delta<\theta<\pi \implies P_r(\delta)>P_r(\theta)$$

o que conclui a prova (tendo em vista (c))

(f) Primeiramente, note que $\lim_{r\to1^-} P_r(\delta) = \lim_{r\to1^-}\frac{1-r^2}{1-2r\underbrace{\cos\delta}_{\neq1}+r^2} = 0$

Segue do item (e) que a convergência acima é uniforme. ∎



Pense em $\{P_r(\theta);\ 0 \le r < 1\}$ como uma família de funções da variável θ, indexada em r $(0 \le r < 1)$

Conforme r se aproxima de 1, a função $P_r(\theta)$ converge para zero fora de uma vizinhança $]-\delta, \delta[$ da origem.

Além disso, todos os membros da família são positivos, pares, 2π-per. e tem média 1.

Teorema: Seja $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ o disco aberto unitário de $\mathbb{C}$. Se $f: \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua então existe uma função contínua $u: \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

(a) $u(z) = f(z)$, $\forall z \in \partial D$

(b) u é harmônica

Além disso u é única e definida pela fórmula

$$(6) \qquad u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it})\, dt$$

para $0 \le r < 1$ e $0 \le \theta \le 2\pi$.

Obs: Em outras palavras, esse teorema diz que u é solução do problema de Dirichlet no disco

$$\begin{cases} u \in C^2(D) \cup C^0(\overline{D}) \\ \Delta u = 0 \\ u|_{\partial D} = f \end{cases}$$

e que o núcleo de Poisson é a "solução fundamental", ou seja

$$u(re^{i\theta}) = P_r(\theta) \underbrace{*}_{\text{(convolução)}} f(\theta), \quad 0 \le r < 1 \text{ e } \theta \in [0, 2\pi]$$

Dem: Defina a função $u: \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo a expressão (6) acima, quando $r \in [0,1)$ e

$$u(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta}), \quad \text{quando } r = 1$$

Por definição da u, a condição (a) do teorema está satisfeita. Falta provar que u é harmônica em D e contínua em $\overline{D}$. e é única.

Afirmação 1: u é harmônica em D

Para $0 \le r < 1$ temos

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re\left(\frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}}\right)\underbrace{f(e^{it})}_{\in\mathbb{R}}\,dt$$

$$= Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}}dt\right) = Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}dt\right)$$

Considere agora a função $g: D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$(*) \qquad g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w}\,\frac{w+z}{w-z}\,dz \quad , z \in D \text{ e } \gamma(t) = e^{it}, \; -\pi \le t \le \pi .$$

Substituindo $\gamma(t)$ na integral acima vem $g(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}dt$ para $0 \le r < 1$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

Como $u = Re\, g$, basta provar que g é analítica para podermos concluir que u é harmônica. Para provar isso basta observar que o integrando de $(*)$, $\varphi(w,z) = \frac{f(w)}{iw}\,\frac{w+z}{w-z}$, $(w,z) \in \{\gamma\} \times D$ é contínua e $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ é contínua e aplicar a regra de Leibniz para funções analíticas (Conway p.73/74, ex 2)

" Se $G \subset \mathbb{C}$ é aberto, γ é uma curva retificável em G e $\varphi: \{\gamma\} \times G \to G$ é contínua então $g(z) = \int_\gamma \varphi(w,z)\,dw$ é contínua. Além disso, se $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ existe e é contínua em $\{\gamma\} \times G$ então g é analítica com $g'(z) = \int_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}(w,z)\,dw$. "

Afirmação 2: u é contínua em $\bar{D}$

Como u é harmônica em D então u é contínua em D, restando provar a continuidade na fronteira do disco ∂D. Isso será feito no lema abaixo.

Afirmação 3: u é única em $\bar{D}$

Suponha que $v \in C^0(\bar{D})$ é outra função harmônica em D tal que $v(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. Neste caso $u - v$ também é harmônica e $(u-v)(z) = 0$, $\forall z \in \partial D$

Como $\varphi = u - v$ é contínua no compacto $\bar{D}$, então existem $z_0, z_1 \in \bar{D}$ tais que $\varphi(z_0) = \max_{z \in D} \varphi(z)$ e $\varphi(z_1) = \min_{z \in D} \varphi(z)$.

Como $\varphi \equiv u - v$ é harmônica então φ possui a PVM e vale o princípio do máximo (e do mínimo), ou seja, se $z_0 \in D$ ($z_1 \in D$) e $\varphi(z_0) \le \varphi(z)$, $\forall z \in D$ ($\varphi(z_1) \ge \varphi(z)$, $\forall z \in D$) então φ é constante.

Logo por continuidade $\varphi(z_0) = 0 = \varphi(z_1) \implies u \equiv v$.

Lema: Dados $\alpha \in [-\pi, \pi]$ e $\varepsilon > 0$, existe $\rho \in (0,1)$ e um arco $A \subset \partial D$ passando por $e^{i\alpha}$ tal que

$$\rho < r < 1 \text{ e } e^{i\theta} \in A \Rightarrow |u(re^{i\theta}) - f(e^{i\alpha})| < \varepsilon$$

Prova do lema. Para $\alpha = 0$, como f é contínua em $z = e^{0i} = 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$(*) \quad |\theta| < \delta \Rightarrow |f(e^{i\theta}) - f(1)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Pondo $M = \max\{|f(e^{i\theta})| \, ; \, -\pi \leq \theta \leq \pi\}$, da proposição anterior, item (e), obtemos $\rho \in (0,1)$ tal que

$$\binom{*}{*} \quad \rho < r < 1 \text{ e } |\theta| \geq \frac{1}{2}\delta \Rightarrow P_r(\theta) < \frac{\varepsilon}{3M}$$

Seja $A = \{e^{i\theta} \, ; \, |\theta| < \frac{1}{2}\delta\}$ então se $e^{i\theta} \in A$ e $\rho < r < 1$ teremos

$$|u(re^{i\theta}) - f(1)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it})\,dt - f(1)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\,dt\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} P_r(\theta - t)(f(e^{it}) - f(1))\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\geq\delta} P_r(\theta - t)(f(e^{it}) - f(1))\,dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} |P_r(\theta - t)|\,|f(e^{it}) - f(1)|\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\geq\delta} |P_r(\theta - t)|\,|f(e^{it}) - f(1)|\,dt$$

$$\overset{*}{\leq} \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{3}\int_{|t|<\delta} |P_r(\theta - t)|\,dt + \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{3M}\int_{|t|\geq\delta} |f(e^{it}) - f(1)|\,dt$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{3}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{P_r(\theta - t)}_{\geq 0}\,dt + \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{3M}\int_{-\pi}^{\pi}(2M)\,dt = \varepsilon.$$

Note que $|t| \geq \delta$ e $|\theta| \leq \frac{1}{2}\delta \Rightarrow |t - \theta| \geq \frac{1}{2}\delta$, logo podemos usar $\binom{*}{*}$ em $(*)$. ■