Recordando

Dado um aberto $G \subset \mathbb{C}$

(1) $u: G \to \mathbb{R}$ é harmônica se $u \in C^2(G;\mathbb{R})$ e $\Delta u = 0$

(2) Se f é analítica em G então $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$ são harmônicas

(3) Se G é simplesmente conexo e u é harmônica em G então existe $f: G \to \mathbb{C}$ analítica tal que $u = \operatorname{Re} f$

(4) Se u é harmônica então $u \in C^\infty(G)$

(5) Se u é harmônica em G e $\overline{B}(a,r) \subset G$ então

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})\, d\theta \qquad (*)$$

(6) Dizemos que a função contínua $u: G \to \mathbb{R}$ tem a PVM se $(\forall a \in G)(\forall r > 0)\ \overline{B}(a,r) \subset G \Rightarrow$ vale $(*)$ acima

(7) Princípio do máximo. Seja G aberto e conexo e $u: G \to \mathbb{R}$ contínua com a PVM. Se existe $a \in G$ tal que $u(a) \geq u(z)$, $\forall z \in G$ então u é constante.

(8) Princípio do mínimo: Com as mesmas hipóteses acima, se existe $a \in G$ tal que $u(a) \leq u(z)$, $\forall z \in G$ então u é constante.

(9) Corolário: Seja G um aberto conexo limitado e $v: \overline{G} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz a PVM em G. Se $v|_{\partial G} \equiv 0$ então $v(z) = 0$, $\forall z \in G$.

Dem: Como G é limitado então $\overline{G}$ é compacto, pela continuidade de v no compacto $\overline{G}$ existem $a, b \in \overline{G}$ tais que

$$v(a) \leq v(z) \leq v(b), \quad \forall z \in \overline{G}$$

Se $b \in G$, pelo princípio do máximo temos v constante em G. Como v é contínua em $\overline{G}$ e $v|_{\partial G} \equiv 0$ então $v \equiv 0$ em $\overline{G}$

Analogamente, se $a \in G$ pelo princípio do mínimo temos $u \equiv 0$ em G

Finalmente, se $a, b \in G$ então $0 = u(a) \leq u(z) \leq u(b) = 0$, $\forall z \in \overline{G}$ e portanto $u \equiv 0$ em $\overline{G}$. ∎

(10) Núcleo de Poisson

$$P_r(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} = \operatorname{Re}\left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}\right) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}, \quad \begin{array}{l} 0 \leq r < 1 \\ \theta \in \mathbb{R}. \end{array}$$

(11) Provamos que cada $P_r(\theta)$ é positiva, par, 2π-periódica, decrescente em $(0,\pi)$ e, para cada $\delta>0$ fixado, $\lim_{r\to 1^-} P_r(\theta)=0$ uniformemente para $0<\delta<|\theta|\leq\pi$

(12) Se $f:\partial D\to\mathbb{R}$ é contínua então existe uma função $u:\bar{D}\to\mathbb{R}$ contínua tal que $u|_{\partial D}=f$ e u é harmônica em D.
Além disso, $u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)f(e^{it})\,dt$, $0\leq r<1$ e $\theta\in[0,2\pi]$

Ficou faltando provar apenas que u é única.
Suponha que existe $v:\bar{D}\to\mathbb{R}$ contínua, harmonica em D com $v|_{\partial D}\equiv f$, então $(u-v)$ é harmônica em D e $u-v|_{\partial D}\equiv 0$. Segue do corolário (9) que $u\equiv v$. ■

(13) Corolário: Dados $a\in\mathbb{C}$, $\rho>0$ e $h:\partial B(a,\rho)\longrightarrow\mathbb{R}$ contínua, existe $v:\bar{B}(a,r)\longrightarrow\mathbb{R}$ contínua tal que
(i) v é harmônica em $B(a,\rho)$
(ii) $v|_{\partial B(a,\rho)}\equiv h$

Dem: Considere a função $f(e^{i\theta})=h(a+\rho e^{i\theta})$ definida em ∂D.
Pelo teorema anterior existe $u:\bar{D}\to\mathbb{R}$ contínua, harmonica em D tal que $u|_{\partial D}\equiv f$. Agora basta definir $v(z)=u\left(\frac{1}{\rho}(z-a)\right)$, $\forall z\in B(a,\rho)$ e teremos v harmônica em $B(a,\rho)$ e
$w(a+\rho e^{i\theta})=u\left(\frac{1}{\rho}(a+\rho e^{i\theta}-a)\right)=u(e^{i\theta})=f(e^{i\theta})=h(a+\rho e^{i\theta})$. ■

Teorema: Se $u:G\longrightarrow\mathbb{R}$ é contínua no aberto $G\subset\mathbb{C}$ e possui a PVM então u é harmônica em G.

Dem: Seja $a\in G$ e $\rho>0$ tais que $\bar{B}(a,\rho)\subset G$, então basta provar que u é harmônica em $B(a,\rho)$ para concluir o resultado.
Pelo corolario (13) existe $v:\bar{B}(a,\rho)\longrightarrow\mathbb{R}$ contínua tal que v é harmônica em $B(a,\rho)$ e $v|_{\partial B(a,\rho)}\equiv u|_{\partial B(a,\rho)}$

Como v é harmônica e u tem a PVM então $(u-v)$ tem a PVM e $u-v|_{\partial B(a,\rho)}\equiv 0\Rightarrow u\equiv v$ em $B(a,\rho)$ (pelo corolario 9).
Em particular u é harmônica. ■