"Uma introdução pouco rigorosa"

Aula 1
01
04/01/16

Comece definindo duas operações em $\mathbb{R}^2$:

ADIÇÃO : $(a,b)+(c,d) = (a+c,\ b+d)$
MULTIPLICAÇÃO: $(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$

É fácil ver que $(\mathbb{R}^2,+)$ é um grupo abeliano com elemento neutro $(0,0)$ e inverso aditivo de (a,b) sendo $(-a,-b)$. Também é fácil mostrar que essa noção de multiplicação é associativa e comutativa, com elemento neutro $(1,0)$. Para calcular o inverso de um elemento $(a,b)\neq(0,0)$, deve-se encontrar o par $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que

$$(a,b)\cdot(x,y)=(1,0) \iff \begin{cases} ax-by=1 \\ bx+ay=0 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2+b^2\neq 0$, o sistema possui uma única solução

$$x=\frac{a}{a^2+b^2}\ ,\quad y=\frac{-b}{a^2+b^2}$$

Finalmente, a multiplicação acima é distributiva em relação a adição.

Podemos resumir todas essas afirmações dizendo que $\mathbb{R}^2$ com essas duas operações possui uma estrutura algébrica de corpo.

Tal corpo é denotado pela letra $\mathbb{C}$ e chamado de corpo dos números complexos.

A seguir consideremos a função

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$$
$$a\longmapsto f(a)=(a,0)$$

Note que:

$$f(a)+f(c)=(a,0)+(c,0)=(a+c,0)=f(a+c)$$

$$f(a)\,f(c)=(a,c)\cdot(c,0)=(ac,0)=f(a\cdot c)$$

ou seja, f preserva as operações de adição e multiplicação (é um homomorfismo). Nesse sentido podemos dizer que há uma cópia de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ (ou que $\mathbb{R}\times\{0\}\subset\mathbb{C}$ é isomorfo a $\mathbb{R}$).

Dessa forma, podemos representar os números complexos da forma $(a,0)\in\mathbb{C}$ simplesmente por a, sem perigo de confusão.

$$(a,0)=a$$

Notamos também que

$$(0,1)^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$$

ou seja, $(0,1)$ é a raiz quadrada de (-1). Vamos denotar

$$i=(0,1)$$

Observando que

$$a(x,y)=(a,0)\cdot(x,y)=(ax-0y,\,ay+0x)=(ax,ay)$$

temos

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=a(1,0)+b(0,1)=a\cdot 1+b\cdot i$$

Usaremos as notações (a,b) e $a+ib$ para números complexos sempre que for conveniente.

Observação: Note que -1 possui duas raízes quadradas $i=(0,1)$ e $-i=(0,-1)$. Na verdade, não é difícil provar que qualquer $(a,b)\in\mathbb{C}\setminus\{(0,0)\}$ possui duas raízes quadradas.

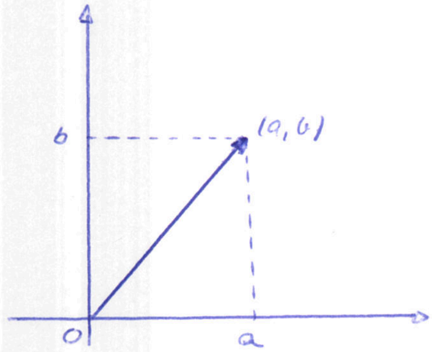
$$(x+iy)^2=a+ib \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases}$$

Isolando y na segunda equação e substituindo na primeira obtém-se uma equação biquadrada cujas soluções levam a:

$$x = \pm\left(\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^{1/2} \text{ e } y = \pm\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)\frac{b}{|b|}$$

(aqui $b \neq 0$, o caso $b=0$ é trivial)

O Plano de Argand-Gauss

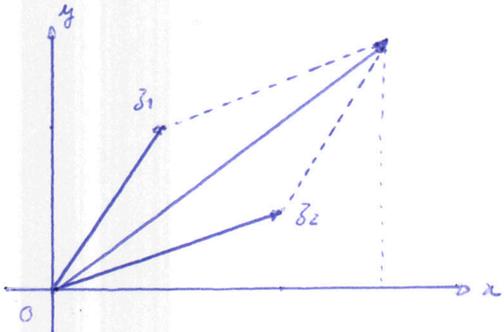


Voltando à representação de $\mathbb{C}$ por pares ordenados, naturalmente somos levados à representação geométrica dos números complexos como vetores.

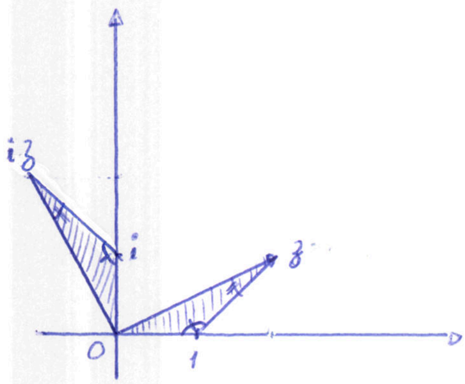
Os números reais a são associados aos vetores $(a,0)$, ou a pontos $(a,0)$ no eixo das abscissas, que passa a ser chamado de "eixo real"

Os números da forma bi são associados a pontos $(0,b)$ no eixo das ordenadas, que será chamado de "eixo imaginário".

A soma de dois números complexos z_1 e z_2 corresponde à soma usual de vetores z_1+z_2 (regra do paralelogramo).



O produto z_1z_2 também pode ser interpretado geometricamente usando semelhança de triângulos. Começa-se considerando o triângulo de vértices 0, 1 e z_1 e então o triângulo semelhante (com mesma orientação) com vértices em 0, z_2 e P, o ponto P em questão é o produto z_1z_2. Esse fato pode ser provado geometricamente e será visto quando falarmos de coordenadas polares.



Se $z = x+iy$ denotaremos $\operatorname{Re} z = x$ e $\operatorname{Im} z = y$ as partes real e imaginário de z e por $\bar{z} = x - iy$ seu conjugado.

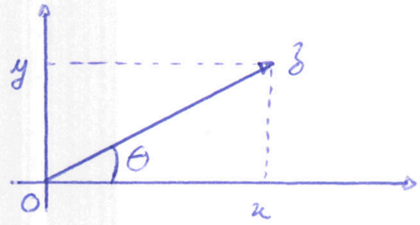
Note que $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ é o comprimento de z e

$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2+y^2 = |z|^2$

Isso é útil na divisão, pois se $z, w \in \mathbb{C}$ e $w \neq 0$ então

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w}\frac{\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{1}{|w|^2} z\bar{w}$$

em particular, $w^{-1} = \bar{w}/|w|^2$



O argumento de $z = x+iy$, denotado $\operatorname{Arg} z$, é o ângulo θ entre o vetor $\vec{0z}$ e o eixo real positivo. Note que

$$\cos\theta = \frac{y}{|z|} \quad e \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{x}{|z|} \Rightarrow \begin{cases} x = |z| \operatorname{sen}\theta \\ y = |z|\cos\theta \end{cases}$$

Pondo $r = |z|$ temos $z = x+iy = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = r \operatorname{cis}\theta$

Nesse contexto r e θ são as coordenadas polares de z e $r\operatorname{cis}\theta$ sua forma polar.

Se $z = r_1 \cos\theta_1$ e $z_2 = r_2 \cos\theta_2$ então $\begin{cases} z_1 z_2 = r_1 r_2 \cos(\theta_1+\theta_2) \\ \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\cos(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$

$(z_2 \neq 0)$

pois

$$\begin{aligned} \operatorname{cis}\theta_1 \operatorname{cis}\theta_2 &= (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) \end{aligned}$$

Segue, por indução, que $z_1^n = r_1^n \operatorname{cis} n\theta_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. e essa fórmula pode ser estendida para os inteiros facilmente. (prove)

Fórmula de De Moivre: $(\operatorname{cis}\theta)^n = \operatorname{cis}(n\theta)$

As seguintes propriedades são úteis e de fácil verificação

a) $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$, $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

b) $|zw| = |z||w|$ $\quad |z/w| = |z|/|w|$ e $|z| = |\bar{z}|$

c) $|z+w| \le |z| + |w|$ $\quad , \forall z, w \in \mathbb{C}$ $\quad$ (desigualdade triangular)
$\big||z|-|w|\big| \le |z-w|$

Para provar a desigualdade triangular, observamos que $\mathrm{Re}\, z \overset{(*)}{\le} |z|$
logo

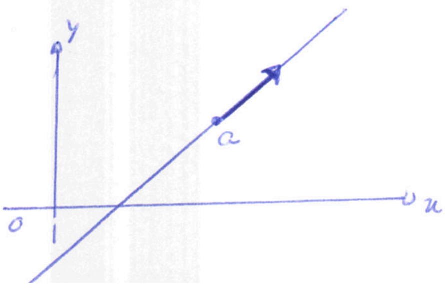
$$|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w}$$
$$= |z|^2 + (\bar{z}w + \overline{\bar{z}w}) + |w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$$
$$\overset{(*)}{\le} |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2$$

Note que a igualdade ocorrerá quando $|z\bar{w}| = \mathrm{Re}(z\bar{w})$, ou seja, quando $z\bar{w}$ for um número real não negativo, em particular, $\mathrm{Im}(z\bar{w}) = 0$. Veremos a seguir que isso é equivalente a dizer que os vetores z e w possuem mesma direção e sentido, o que concorda com a noção geométrica da desigualdade triangular

Retas e semiplanos de $\mathbb{C}$

Em geometria analítica aprendemos que uma reta fica determinada quando conhecemos um ponto e um vetor direção.
Assim a reta que passa pelo ponto $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{C}$ com direção $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{C}$ é constituída por pontos da forma

$$z = a + tb, \quad t \in \mathbb{R}$$



Como $b \neq 0$ então $z = a + t b \iff \frac{z-a}{b} = t \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0$
assim

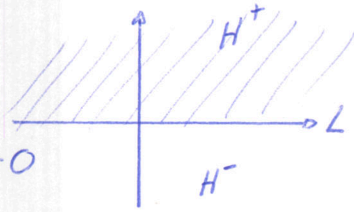
$$L = \{ z \in \mathbb{C} \,;\, z = a + t b,\ t \in \mathbb{R} \} = \{ z \in \mathbb{C} \,;\, \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0 \}$$

O que leva a pergunta: qual é a representação geométrica dos conjuntos

$$\{ z \,;\, \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0 \} \quad e \quad \{ z \,;\, \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) < 0 \}$$

<u>exemplo fácil</u>: Tome $a = 0$ e $b = 1$, então $L = \{ z \,;\, \operatorname{Im} z = 0 \}$ corresponde ao eixo real,

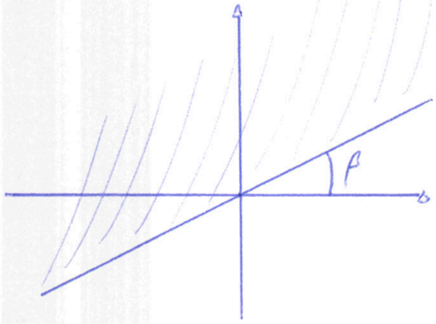
$$H^+ = \{ z \,;\, \operatorname{Im} z > 0 \} \quad e \quad H^- = \{ z \,;\, \operatorname{Im} z < 0 \}$$



<u>exemplo mais elaborado</u>: Tome $a = 0$ e $b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$

Escrevendo $b = |b| \operatorname{cis} \beta$ e $z = r \operatorname{cis} \theta$ teremos $z/b = \frac{r}{|b|} \operatorname{cis}(\theta - \beta)$
para $z \neq 0$ temos $\frac{r}{|b|} > 0$, logo

$$\operatorname{Im}(z/b) > 0 \iff \operatorname{sen}(\theta - \beta) > 0 \iff 0 < \theta - \beta < \pi$$
$$\iff \beta < \theta < \pi + \beta$$



<u>exemplo + geral</u>: quando $a \neq 0$, basta observar que o conjunto

$$H_a^+ = \{ z \,;\, \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0 \}$$

pode ser reescrito como $H_a^+ = a + H_0^+$

aqui $a + H_0^+$ é a soma vetorial de ponto e conjunto, ou seja,
$a + H_0^+ = \{ a + w \,;\, w \in H_0^+ \}$

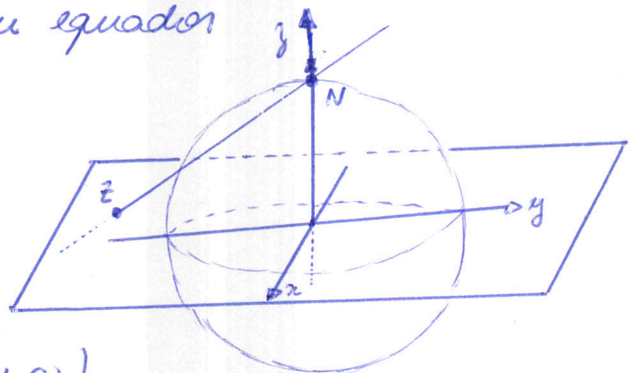
O plano estendido

Em várias situações de análise complexa precisamos considerar funções que tendem a ∞ quando nos aproximamos de um ponto, por isso introduzimos o plano estendido

$$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

damos uma representação geométrica, pela projeção estereográfica e introduzimos uma noção de distância, para analisar funções que assumem valores no infinito

Seja $S^2 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ a^2+b^2+c^2 = 1\}$ a esfera unitária de $\mathbb{R}^3$ e $N = (0,0,1)$ seu polo norte. Também identificamos $\mathbb{C}$ com o plano $\{(x,y,0);\ x,y \in \mathbb{R}\}$. Assim $\mathbb{C}$ corta S^2 exatamente em seu equador



Para cada $z = (x,y,0) \in \mathbb{C}$, considere a reta que passa por z e N. Os pontos dessa reta satisfazem a equação

$$(a,b,c) = (x,y,0) + t\big((0,0,1) - (x,y,0)\big)$$
$$= \big((1-t)x, (1-t)y, t\big), \quad t \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

Para $t = 0$ temos $z = (x,y,0)$ e com $t = 1$ temos $N = (0,0,1)$ em $(*)$.

Note que, para cada $z = (x,y,0) \in \mathbb{C}$, essa reta intersecta S^2 exatamente em dois pontos: $N = (0,0,1)$ e em um ponto $Z = (x_1, x_2, x_3)$, que satisfaz a equação $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Como Z é da forma expressa em $(*)$ então devemos ter

$$\big((1-t)x\big)^2 + \big((1-t)y\big)^2 + t^2 = 1 \iff (1-t)^2(x^2+y^2) = 1 - t^2.$$

ou seja

$$(1-t)^2|z|^2 = 1 - t^2$$

como $t \neq 1$ então $\cancel{(1-t)}(1-t)|z|^2 = \cancel{(1-t)}(1+t)$

$$\Rightarrow |z|^2 - 1 = (1+|z|^2)t \quad \Rightarrow t = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$$

Daqui segue que

$$\circledast \qquad x_1 = \frac{2x}{|z|^2+1} = \frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}\,, \quad x_2 = \frac{2y}{|z|^2+1} = \frac{z-\bar{z}}{|z|^2+1}\,, \quad x_3 = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$$

Por outro lado, se for dado $Z=(x_1,x_2,x_3)\in S^2$ e desejamos encontrar $z=(x,y,0)\in\mathbb{C}$ no qual a reta perfura o plano complexo, basta retornar a reta $(*)$ acima e tomar $t=x_3$ chegando a

$$z = \frac{x_1+ix_2}{1-x_3}$$

Vamos agora definir uma noção de distância no plano estendido $\mathbb{C}_\infty$. Dados $z, z'\in\mathbb{C}_\infty$, definimos a distância de z a z' como sendo a distância dos pontos correspondentes Z e Z' em $\mathbb{R}^3$.

Se $Z=(x_1,x_2,x_3)$ e $Z'=(x_1',x_2',x_3')$ então

$$d(z,z') = \left((x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2\right)^{1/2}$$

Como $Z, Z'\in S^2$ então

$$\begin{aligned}(x_1-x_1')^2+(y_1-y_1')^2+(z_1-z_1')^2 &= (x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\left((x_1')^2+(x_2')^2+(x_3')^2\right)\\ &\quad -2(x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3')\\ &= 2-2(x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3')\end{aligned}$$

Usando as expressões em $\circledast$ acima na igualdade acima obtemos

$$d(z,z') = \frac{2|z-z'|}{\left[(1+|z|^2)(1+|z'|^2)\right]^{1/2}}$$

Analogamente, como ∞ corresponde a $N=(0,0,1)$ teremos

$$d(z,\infty) = \frac{2}{(1+|z|^2)^{1/2}}.$$