Diferenciabilidade de Séries de Potências

Aula 4

01

08/01/16

Suponha que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ tenha raio de convergência $R>0$, e considere a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1} \quad (*)$$

obtida pelo derivação termo a termo da primeira série. Nosso primeiro objetivo é mostrar que o raio de convergência da série $(*)$ também é igual a R.

Note que o raio de convergência de $(*)$ é

$$\tilde{R} = \left(\limsup \, (n|a_n|)^{\frac{1}{n-1}}\right)^{-1}$$

então antes de provar esse resultado faremos dois lemas

Lema 1: $\lim n^{\frac{1}{n-1}} = 1$

Se $y_n = n^{\frac{1}{n-1}}$ então $\log y_n = \frac{\log n}{n-1}$ e pela regra de L'Hôpital temos $\lim \log y_n = \lim \frac{\log n}{n-1} = \lim \frac{1/n}{1} = 0$. Segue da continuidade da função exponencial que $\lim n^{\frac{1}{n-1}} = \lim e^{\log y_n} = e^0 = 1$ ■

Lema 2 Sejam (x_n) e (y_n) sequências limitadas de números reais tais que $\lim y_n = y \geq 0$ então

$$\limsup (x_n y_n) = y \limsup x_n$$

Dem. O caso $y=0$ é consequência imediata do resultado: o produto de uma sequência limitada por uma sequência que converge para zero também converge para zero. Agora, se $y>0$ escreva $x_n y_n = x_n y + x_n(y_n - y)$. Como $y_n - y \longrightarrow 0$ então

$$\begin{aligned}\limsup x_n y_n &= \limsup x_n y + \limsup x_n (y_n - y) \\ &= y \limsup x_n + 0. \ ■\end{aligned}$$

Teorema: Se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ tem raio de convergência $R>0$ então o raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$$

também é igual a R.

Dem. Tendo em vista os dois lemas acima, basta mostrar que

$$R' \doteq (\limsup |a_n|^{\frac{1}{n-1}})^{-1} = R$$

Primeiro note que R' é o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n$ e que

$$a_0 + z\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

portanto, para $|z| < R'$ temos $\sum |a_n z^n| = |a_0| + |z| \sum |a_{n+1} z^n| < \infty$, ou seja $R' \leq R$

Por outro lado, se $|z| < R$ e $z \neq 0$ então $\sum |a_n z^n| < \infty$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} z^n| = \frac{1}{|z|} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} z^{n+1}| = \frac{1}{|z|}|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} z^{n+1}| = \frac{1}{|z|}|a_0| + \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < \infty$$

e portanto $R \leq R'$. Daqui segue que $R = R'$ e a prova está completa. ∎

Corolário: Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ tem raio de convergência $R > 0$ então, para qualquer $K \in \mathbb{N}$, o raio de convergência da série

$$\sum_{n=K}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-K+1) a_n (z-a)^{n-K}$$

também é igual a R.

Teorema: Se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tem raio de convergência R então $f'(z)$ existe e

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \ \forall z \in \mathbb{C} \text{ com } |z| < R.$$

Dem. Vamos dividir a prova em duas partes. Na primeira parte analisaremos o caso $R = \infty$, no qual não há preocupação com o raio de convergência da série e podemos concentrar nossa atenção na prova da diferenciabilidade. Na segunda parte analisaremos o caso $0 < R < \infty$ enfrentando as restrições que o raio de convergência traz, porém repetindo a maior parte dos argumentos da primeira parte.

Primeira parte: $R = \infty$

Como a série converge para qualquer $z \in \mathbb{C}$ então

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h}$$

Vamos escrever
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n r_n$$
sendo
$$r_n = \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} = \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k - z^n - n h z^{n-1}\right)$$
$$= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-1} \Rightarrow |r_n| \le \sum_{k=2}^{n} |z|^{n-k} |h|^{k-1} \underset{|h|<1}{\le} |h| \sum_{k=0}^{n} |z|^{n-k} = |h|(|z|+1)^n$$

ou seja, $r_n \le |h|(|z|+1)^n$, para $|h| \le 1$. Assim quando $|h|<1$ temos
$$\left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \le \sum_{n=2}^{\infty} |a_n||r_n| \le \sum_{n=2}^{\infty} |a_n||h|(|z|+1)^n$$
$$\le |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|(|z|+1)^n = A|h|$$
Fazendo $h \to 0$ concluímos que $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

Segunda parte: $0<R<\infty$

Dado $z \in \mathbb{C}$ com $|z|<R$, escolhemos $\delta>0$ tal que $|z| \overset{\circledast}{=} R-2\delta$ e assumimos que $|h|<\delta$ (pois estamos interessados apenas no comportamento quando $h \to 0$). Neste caso $|z+h|<R$ e como fizemos acima
$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n r_n \quad \text{com } r_n = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} z^{n-k}.$$

Se $z=0$ então $r_n = h^{n-1}$ e a prova é elementar. Porém para $z \neq 0$ precisamos ser mais cuidadosos. Note que
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+2)(n-k+1)}{k(k-1)} \frac{n!}{(k-2)!(n-k+2)!} \underset{k\ge 2}{\le} n^2 \binom{n}{k-2}, \text{ para } k \ge 2.$$
logo, para $z \neq 0$ temos
$$|r_n| \le \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |h|^{k-1} |z|^{n-k} \le \frac{n^2|h|}{|z|^2} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k-2} |h|^{k-2} |z|^{n-(k-2)}$$
$$\underset{j=k-2}{=} \frac{n^2|h|}{|z|^2} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} |h|^j |z|^{n-j} = \frac{n^2|h|}{|z|^2} (|z|+|h|)^n \underset{\circledast}{\le} \frac{n^2|h|}{|z|^2}(R-\delta)^n$$

Portanto $\left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \le \sum_{n=2}^{\infty} |a_n||r_n|$
$$\le \frac{|h|}{|z|^2} \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| (R-\delta)^n \le C h$$
Na última desigualdade usamos o fato $\sum n^2 |a_n| z^n < \infty$ para $|z|<R$ e que $z \neq 0$. Fazendo $h \to 0$ concluímos a prova.

Corolário: Séries de potências são infinitamente diferenciáveis termo a termo sempre com o mesmo raio de convergência

Dem: Aplicando o teorema acima na função $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, que tem mesmo raio de convergência que f, concluímos que f é duas vezes diferenciável com

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

Por indução, segue que $f^{(k)}$ é diferenciável para todo $k \in \mathbb{N}$. ■

Teorema: Se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tem raio de convergência não nulo, então $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$

Dem: Como $f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ então $f(0) = a_0$. Derivando termo a termo temos $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n = 1 \cdot a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^n \Rightarrow f'(0) = a_1$
Prosseguindo dessa forma obtemos a expressão.

Teorema: Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ tem raio de convergência $R>0$ então a função $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ é analítica em $B(a;R)$.

Teorema: Seja G um aberto conexo de $\mathbb{C}$ e $f: G \to \mathbb{C}$ uma função diferenciável em G. Se $f'(z) = 0$, $\forall z \in G$ então f é constante. (omitimos a demonstração)

Função exponencial

Chamamos de função exponencial a função definida por

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n! \quad , \forall z \in \mathbb{C} \qquad (*)$$

Já vimos que essa série converge para qualquer $z \in \mathbb{C}$ (raio de convergência ∞), logo está bem definida e é analítica no plano complexo todo, com derivada

$$(e^z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

Considere agora a função $g(z) = e^z e^{a-z}$, com $a \in \mathbb{C}$ fixado.
Como $g'(z) = (e^z)' e^{a-z} + e^z (e^{a-z})' = 0$, segue do teorema anterior que g é constante, ou seja, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$g(z) = c \ , \ \forall z \in \mathbb{C}$$

Em particular $c = g(0) = e^a$, ou seja

$$e^z e^{a-z} = e^a \ , \ \forall z \in \mathbb{C}$$

Como a e z são arbitrários, tomando $a = w + z$ vem

$$e^z e^w = e^{z+w} \ , \ \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Em especial $e^z e^{-z} = e^0 = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Isso mostra que

$$e^z \neq 0, \ \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z} = (e^z)^{-1}$$

Retomando a série que define a exponencial notamos que os coeficientes são todos reais, logo $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$

No caso em que $\theta \in \mathbb{R}$ temos

$$|e^{i\theta}|^2 = e^{i\theta} \overline{e^{i\theta}} = e^{i\theta} e^{-i\theta} = e^0 = 1$$

em geral

$$|e^z|^2 = e^z \overline{e^z} = e^z e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = e^{2 \operatorname{Re} z}$$

ou seja

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$$

Desta forma, verificamos que a função e^z possui as mesmas propriedades que a exponencial real e^x. Usando essa analogia que existe entre essas funções vamos definir as funções $\cos z$ e $\operatorname{sen} z$ por suas séries de potências

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

É claro que essas séries tem raio de convergência infinito e:

(i) $(\cos z)' = -\operatorname{sen} z$

(ii) $(\operatorname{sen} z)' = \cos z$

(iii) $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

(iv) $\operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

(v) $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$

(vi) $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$

(vii) $e^{i\theta} = \operatorname{cis}\theta$, para $\theta \in \mathbb{R}$ e $z = |z| e^{i\theta}$, com $\theta = \arg z$

(verifiquem todas essas afirmações)

Dizemos que uma função $f = f(z)$ é periódica, com período $p \in \mathbb{C}$, quando $f(z+p) = f(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$

No caso $f(z) = e^z$, se existir $p \in \mathbb{C}$ tal que $f(z+p) = f(z)$ teremos

$e^{z+p} = e^z e^p = e^z \Rightarrow e^p = 1 \Rightarrow 1 = |e^p| = e^{\operatorname{Re} p} \Rightarrow \operatorname{Re}(p) = 0$. Logo $c = i\theta$, para algum $\theta \in \mathbb{R}$.

Mas $1 = e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \theta = k2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, e^z tem período $2\pi i$ (ou qualquer múltiplo inteiro de $2\pi i$)

Função logaritmo

Queremos definir $\log w$ de tal modo que $w = e^z \Leftrightarrow z = \log w$. Para que isso ocorra, a primeira exigência é que $w \neq 0$, pois $e^z \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$; consequentemente não definiremos $\log 0$.

Agora se $e^z = w$ e $w \neq 0$, escrevendo $z = x + iy$ teremos $|w| = |e^z| = e^x$ e $y = \arg w + 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Portanto o conjunto solução da equação $e^z = w$ é

$$\{\log|w| + i(\arg w + 2k\pi);\ k \in \mathbb{Z}\}$$

(aqui $\log|w|$ é o logaritmo usual de número real)

<u>Definição</u>: Seja $G \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo e $f: G \to \mathbb{C}$ uma função tal que $e^{f(z)} = z$, $\forall z \in G$, neste caso dizemos que f é um ramo do logaritmo

<u>Obs</u>: $0 \notin G$

Agora, se f é um ramo do logaritmo em G (aberto e conexo) e $k \in \mathbb{Z}$ considere a função $g(z) = f(z) + 2\pi i$, $z \in G$

Como $e^{g(z)} = e^{f(z)} = z$ então g também é um ramo do logaritmo em G.

A recíproca também é verdadeira, ou seja, se f e g são dois ramos do logaritmo em G então $f(z) = g(z) + 2k\pi i$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Observação: O usual é considerar $G = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C};\ z \leq 0\}$. Assim G é aberto e conexo e cada $z \in \mathbb{C}$ pode ser representado de forma única como $z = |z| e^{i\theta}$, com $-\pi < \theta < \pi$. Neste ramo temos

$$\log z = \log|z| + i\theta$$

Este é chamado de ramo principal do logaritmo em $\mathbb{C} - \{z;\ z \leq 0\}$

Afirmação: Um ramo da função logaritmo é uma função analítica com derivada $(\log z)' = \dfrac{1}{z}$.