Equações de Cauchy-Riemann e Analiticidade

Aula 5
01
11/01/16

Seja $f: G \to \mathbb{C}$ uma função analítica na região G (aberto e conexo de $\mathbb{C}$) então

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Fazendo $h \to 0$ sobre o eixo real temos

$$f'(z) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(x+iy+h)-f(x+iy)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

Por outro lado, se $h \to 0$ sobre o eixo imaginário temos

$$f'(z) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(x+iy+ih)-f(x+iy)}{ih} = \frac{1}{i}\lim \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

e portanto

$$i\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \iff \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Definição: O operador $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ é chamado de operador de Cauchy-Rieman.

Note que se f é analítica em uma região G então $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ em G.

Obs: escrevendo $u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(x+iy)$ e $v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(x+iy)$, ou seja, $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$$

Se $i\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ como acima temos

$$i(u_x + iv_x) = u_y + iv_y$$

e portanto

$$u_x = v_y \quad \text{e} \quad u_y = -v_x \quad (*)$$

que são chamadas de equações de Cauchy-Riemann.

Note que $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff f = u + iv$ e u e v satisfazem $(*)$.

Teorema: Se $f: G \to \mathbb{C}$ tem derivadas parciais contínuas e $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (satisfaz as equações de CR) então f é analítica

Dem: consequência do TVM para funções de uma variável (Conway p. 41)

Com essa caracterização podemos enunciar alguns resultados legais sobre funções analíticas, por exemplo:

Prop 1: Se $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ é analítica no disco $D = D(a;R)$ e $u(x,y) = Re\, f(x,y)$ é constante então f é constante.

Dem. Como u é constante então $u_x(x,y) = u_y(x,y) = 0$, $\forall (x,y) \in D$. Das equações de Cauchy-Riemann temos $v_x = -u_y = 0$ e $v_y = u_x = 0$ em qualquer ponto $(x,y) \in D$.

Segue do teorema do valor médio para funções de uma variável real que $v = v(x,y)$ é constante em qualquer segmento de reta vertical e horizontal contido em D, e portanto v é constante em $D \Rightarrow f$ é constante em D. ∎

Prop 2: Se $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ é analítica no disco $D = D(a,R)$ e $\|f\|^2$ é constante então f é constante

Dem. Escreva $f = u + iv$ e $c = \|f\|^2 \neq 0$ (caso contrário $f \equiv 0$), então

$$u^2(x,y) + v^2(x,y) = c \quad , \forall (x,y) \in D$$

derivando essa expressão em x e depois em y obtemos as equações

$$\begin{cases} 2 u_x u + 2 v_x v = 0 & (1) \\ 2 u_y u + 2 v_y v = 0 & (2) \end{cases}$$

Pelas equações de Cauchy-Rieman na equação (2) temos

$$\begin{cases} 2 u_x u + 2 v_x v = 0 & (1) \\ -2 v_x u + 2 u_x v = 0 & (3) \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por u e a segunda por v teremos

$$\begin{cases} 2 u_x u^2 + 2 v_x u v = 0 & (4) \\ -2 v_x u v + 2 u_x v^2 = 0 & (5) \end{cases}$$

Somando (4) e (5) temos

$$2u_x (u^2 + v^2) = 0 \Rightarrow 2u_x c = 0 \underset{c \neq 0}{\Rightarrow} u_x = 0$$

Segue da proposição anterior que f é constante. ∎

Integrais de linha

Seja $\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$, $a \leq t \leq b$, uma curva na região $G \subset \mathbb{C}$. Dizemos que γ é diferenciável por partes se existir uma partição $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ tal que γ é diferenciável em cada subintervalo $[x_{j-1}, x_j]$ de $[a, b]$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Dizemos que γ é uma curva suave no plano complexo se $\gamma'(t) = x'(t) + i\,y(t) \neq 0$ exceto em um número finito de pontos. (Assumiremos sempre que as curvas são suaves, a menos que seja dito o contrário)

A integral de uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(t) = u(t) + i\,v(t)$ é

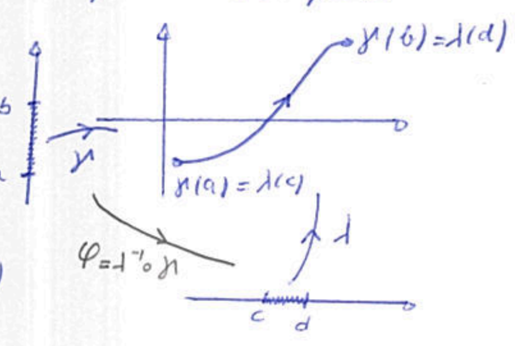
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t) + i\int_a^b v(t)$$

A integral de uma função contínua $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ sobre uma curva C: $\gamma : [a, b] \longrightarrow G$ suave é

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

Aqui "fica implícito" que a integral sobre uma curva depende dos pontos a e b e da direção, porém não depende da parametrização da curva.

Intuitivamente, se $\gamma : [a, b] \longrightarrow G$ e $\lambda : [c, d] \longrightarrow G$ são duas parametrizações da mesma curva C então $\varphi : [a, b] \longrightarrow [c, d]$, $t \longmapsto (\lambda^{-1} \circ \gamma)(t)$ é uma bijeção.



Dizemos que as curvas $C_1 : \gamma : [a, b] \longrightarrow G$ e $C_2 : \lambda : [c, d] \longrightarrow G$ são equivalentes se existe uma função $\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ tal que

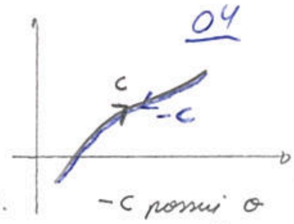
(i) $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$

(ii) $\varphi'(t) > 0$, $\forall t \in [a, b]$

(iii) $\lambda(t) = \gamma(\varphi(t))$, $\forall t \in [a, b]$

<u>Proposição</u>: Se C_1 e C_2 são equivalentes então $\int_{C_1} f = \int_{C_2} f$

Proposição: $\int_{-C} f = -\int_C f$



$-C$ possui o mesmo traço e direção oposta.

Dem

Se C uma curva parametrizada por $\gamma(t)$, $a \le t \le b$ então $-C$ é a curva parametrizada por $\gamma(b+a-t)$, $a \le t \le b$.
Basta escrever $f = u+iv$, $\gamma = x+iy$ e aplicar o teorema de mudança de variáveis nas integrais de funções reais que aparecem, obtendo

$$\int_{-C} f = \int_a^b f(\gamma(b+a-t))\gamma'(b+a-t)\,dt = \int_b^a f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = -\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) = -\int_C f$$

Exemplos 1) $f(x+iy) = x^2+iy^2$ e $\gamma(t) = t(1+i)$, $0 \le t \le 1$ então

$$\int_C f = \int_0^1 (t^2+it^2)(1+i)\,dt = (1+i)^2\int_0^1 t^2\,dt = \frac{2}{3}i$$

2) $f(z) = 1/z$ e $\gamma(t) = re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ e $r \neq 0$

$$\int_C f = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{re^{it}}} re^{it}\, i\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

Lema: Seja $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua, então

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Escrevendo $\int_a^b f(t)\,dt = re^{i\theta}$, com $r \ge 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$ temos

$$r = e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b (e^{-i\theta}f(t))\,dt = \int_a^b Re(e^{-i\theta}f(t))\,dt$$

$$\le \int_a^b |e^{-i\theta}f(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt \Rightarrow \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt \blacksquare$$

Proposição: Suponha que $F: G \longrightarrow \mathbb{C}$ é analítica sobre a curva suave C e $f = F'$ então $\int_C f = F(\lambda(b)) - F(\lambda(a))$, sendo $\lambda:[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ uma parametrização de C.

Seja $\gamma(t) = F(\lambda(t))$, $a \le t \le b$. Pela regra da cadeia $\gamma'(t) = f(\lambda(t))\lambda'(t)$ logo

$$\int_C f = \int_a^b f(\lambda(t))\lambda'(t)\,dt = \int_a^b \gamma'(t)\,dt = \gamma(b) - \gamma(a) = F(\lambda(b)) - F(\lambda(a)). \blacksquare$$

Proposição: Se $f_n \xrightarrow{u} f$ sobre a curva C então $\int_C f = \lim \int_C f_n$

Como $f_n \xrightarrow{u} f$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{L}$, $\forall n \ge n_0$ e $\forall z \in C$ (aqui L é o comprimento de C), logo

$$\left|\int_C f_n - \int_C f\right| \le \int_C |f_n - f|\,dz \le \frac{\varepsilon}{L}\int_C dz = \varepsilon. \blacksquare$$

Proposição (regra de Leibniz) Seja $\varphi:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{C}$ uma função contínua e defina $g:[c,d]\to\mathbb{C}$ por

entao $$g(t)=\int_a^b \varphi(s,t)\,ds$$

(i) g é contínua; e

(ii) se $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ existe e é contínua em $[a,b]\times[c,d]$ então g é diferenciável com

$$g'(t)=\int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)\,ds$$

Dem.: (Conway p. 68/69)

exemplo: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{e^{is}}{e^{is}-z}\,ds=2\pi,\ \forall z\in\mathbb{C}$ com $|z|<1$.

Seja $\varphi(s,t)=\frac{e^{is}}{e^{is}-tz}$, $(t,s)\in[0,1]\times[0,2\pi]$. Como $|z|<1$ então o denominador $|e^{is}-tz|\geq|e^{is}|-|tz|=1-|tz|>0$, ou seja, nunca se anula. Além disso $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ existe e é contínua.

Defina $g(t)=\int_0^{2\pi}\varphi(s,t)\,ds$ e observe que $g(0)=\int_0^{2\pi}\varphi(s,0)\,ds=2\pi$. Se pudermos mostrar que g é constante teremos $g(1)=g(0)=2\pi$ e concluiremos a prova.

Pela regra de Leibniz $\displaystyle g'(t)=\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{e^{is}z}{(e^{is}-tz)^2}\,ds$

Para cada $t\in[0,1]$ fixado considere a função $\Phi_t(s)=\frac{zi}{e^{is}-tz}$.

Como $\Phi_t'(s)=\frac{-zi(ie^{is})}{(e^{is}-tz)^2}=\frac{ze^{is}}{(e^{is}-tz)^2}$, então $\Phi_t(s)$ é uma primitiva de $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,s)$ e portanto

$$g'(t)=\int_0^{2\pi}\frac{d}{ds}\Phi_t(s)\,ds=\Phi_t(2\pi)-\Phi_t(0)=0,\quad\forall t\in[0,1] \text{ fixado}$$

Como $[0,1]$ é ~~convexo~~ conexo segue que g é constante. ∎

Proposição: Seja $f:G\to\mathbb{C}$ uma função analítica e suponha que $\overline{B}(a,r)\subset G$, com $r>0$. Se $\gamma(t)=a+re^{it}$, $0\leq t\leq 2\pi$ então

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}\,dw,\quad \text{para } |z-a|<R$$

Dem. Tomando $G_1=\{\frac{1}{r}(z-a);\ z\in G\}$ e $g(z)=f(a+rz)$ vemos que não há perda de generalidade em supor que $a=0$ e $r=1$. Logo vamos supor que

$$\overline{B}(0,1)\subset G$$

Se $z \in G$ e $|z|<1$ então temos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(s))}{\gamma(s)-z}\gamma'(s)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{is})}{e^{is}-z}\, i e^{is} ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{is})\,e^{is}}{e^{is}-z}\,ds$$

ou seja $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\,ds = \int_0^{2\pi}\frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is}-z}\,ds$$

Logo basta mostrar que

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is}-z} - f(z)\right)ds = 0$$

Para isso, vamos aplicar a regra de Leibniz na função

$$\varphi(s,t) = \frac{f(z+t(e^{is}-z))e^{is}}{e^{-is}-z} - f(z)\ , \quad (t,s)\in[0,1]\times[0,2\pi]$$

Como $|z+t(e^{is}-z)| = |z(1-t)+te^{is}| \leq (1-t)\underbrace{|z|}_{<1} + t\underbrace{|e^{is}|}_{=1} < (1-t)+t = 1$
e $|e^{is}-z| > |e^{is}| - |z| > 1-|z| > 0$ então φ está bem definida e é continuamente diferenciável

Seja $g(t) = \int_0^{2\pi}\varphi(s,t)\,ds$, então g tem derivada contínua.

A proposição ficará provada se mostrarmos que $g(1)=0$, faremos isso provando que (i) $g(0)=0$; e (ii) g é constante.

(i) $$g(0) = \int_0^{2\pi}\varphi(s,0)\,ds = \int_0^{2\pi}\left(\frac{f(z)e^{is}}{e^{is}-z} - f(z)\right)ds = f(z)\underbrace{\int_0 \frac{e^{is}}{e^{is}-z}\,ds}_{=2\pi} - f(z)\int_0^{2\pi} ds = 0$$

(ii) Pela regra de Leibniz $g'(t) = \int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)\,ds$
sendo
$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t) = \frac{1}{\cancel{e^{is}-z}}e^{is}f'(z+t(e^{is}-z))\cancel{(e^{is}-z)} = e^{is}f'(z+t(e^{is}-z))$$

Note que, para $0<t\leq 1$, a função

$$\Phi_t(s) = \frac{1}{it}f(z+t(e^{is}-z))$$

é uma primitiva de $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)$ (em relação à variável s), logo

$$g'(t) = \Phi(2\pi) - \Phi(0) = 0,\ \forall t\in(0,1]$$

Como g' é contínua em $[0,1]$ e se anula em $(0,1]$, então $g'\equiv 0$ em $[0,1]$ $\Rightarrow$ g é constante. ∎