Representação de funções analíticas como série de potências

Teorema: Se $f: G \to \mathbb{C}$ é analítica na bola $B(a,R)$, $R>0$, então
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad , \text{para } |z-a|<R$$
sendo $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$

Dem: Seja $\gamma(t) = a + e^{it}$, com $0 \le t \le 2\pi$, o círculo de raio r $(0<r<R)$.
Se $|z-a|<r$ e $|w-a|=r$ (w está sob o círculo e $z \in B(a,r)$) então
$$\frac{|f(w)|\,|z-a|^n}{|w-a|^{n+1}} \le \left(\max_{|w-a|=r} |f(w)|\right) \frac{1}{r^n} |z-a|^n = \frac{M}{r}\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^n$$
Como $\left|\frac{z-a}{r}\right|<1$, segue do teste M de Weierstrass que a série
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} (z-a)^n$$ converge uniformemente quando $|z-a|<r$ e $|w-a|=r$.

Note também que
$$\sum_{n=0}^{\infty} f(w) \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} = \frac{f(w)}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n = \frac{f(w)}{w-a} \frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{w-a}\right)}$$
$$= f(w) \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{f(w)}{w-z}$$
ou seja
$$\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} (z-a)^n$$

Multiplicando essa expressão por $\frac{1}{2\pi i}$ e integrando sobre γ teremos
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} (z-a)^n\, dw$$

Segue do teorema anterior e da convergência uniforme que
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw\right)(z-a)^n$$

Denotando por $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw$, observamos que a_n não depende de z, logo a série acima converge para $|z-a|<r$, e portanto
$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

e portanto a_n não depende de γ (ou seja de r). Como $r<R$ é arbitrário, essa representação vale para $|z-a|<R$. ■

Corolário 1: Se $f: G \to \mathbb{C}$ é analítica no aberto $G \subset \mathbb{C}$ e $a \in G$ então $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, para $|z-a|<R$, sendo $R = d(a, \partial G)$

Dem: Neste caso $B(a,R) \subset G$ e f é analítica em $B(a,R)$, logo o resultado segue imediatamente do teorema acima. ■

Corolário 2: Se $f: G \to \mathbb{C}$ é analítica no aberto $G \subset \mathbb{C}$, então f é infinitamente diferenciável em G

Corolário 3: Se $f: G \to \mathbb{C}$ é analítica no aberto $G \subset \mathbb{C}$ e $\overline{B}(a,r) \subset G$ então

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw$$

sendo $\gamma(t) = a + re^{it}$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Corolário 4: (Estimativa de Cauchy) Se f é analítica em $B(a,R)$ e $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in B(a,R)$ então

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!\,M}{R^n}$$

Dem: Pelo corolário anterior, para qualquer $0<r<R$ temos

$$|f^{(n)}(a)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(w)|}{|w+a|^{n+1}}\, dw$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} \int_\gamma dw = \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^n r} 2\pi r = \frac{n!\,M}{r^n}$$

Ou seja, $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!\,M}{r^n}$, $\forall r \in (0,R)$

Como $\inf_{0<r<R} \frac{n!\,M}{r^n} = \frac{n!\,M}{R^n}$ então $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!\,M}{R^n}$ ■

Proposição: Se f é analítica na bola $B(a,R)$ e γ é uma curva fechada suave em $B(a,R)$ então

$$\int_\gamma f = 0$$

Como f é analítica em $B(a,r)$ então $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, para $|z-a|<r$. Considere agora a função

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1}=(z-a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-a)^n$$

Como $\lim \sqrt[n]{n+1}=1$ então $\lim\sup\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}=\lim\sup\sqrt[n]{|a_n|}$ e a série que define F possui mesmo raio de convergência que a série que define f. Além disso $F'(z)=f(z)$ para $|z-a|<r$, logo

$$\int_\gamma f = F(\gamma(2\pi))-F(\gamma(0))=0 \text{ , pois } \gamma(2\pi)=\gamma(0). \blacksquare$$

Dizemos que uma função $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ é inteira se f for analítica no plano complexo todo.
Neste caso $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$, com raio de convergência ∞.

Teorema de Liouville: Se f é uma função inteira e limitada então f é constante

Dem: Como f é analítica no plano complexo todo então existe $f'(z)$, para todo $z\in\mathbb{C}$. Basta provar que $f'(z)=0$, $\forall z\in\mathbb{C}$.
Por hipótese f é limitada em $\mathbb{C}$, ou seja, existe $M>0$ tal que $|f(z)|\leq M$, $\forall z\in\mathbb{C}$. Como f é analítica no disco $B(z,R)$, qualquer que seja $R>0$, pela estimativa de Cauchy temos

$$|f'(z)|\leq\frac{1!\,M}{R}=\frac{M}{R}$$

Como $R>0$ é arbitrário, segue que $f'(z)=0$, $\forall z\in\mathbb{C}$. $\blacksquare$

Teorema fundamental da álgebra: Qualquer polinômio não constante possui raiz complexa, ou seja, se $p=p(z)$ é um polinômio com $\text{grau}(p(z))\geq 1$, então existe $a\in\mathbb{C}$ tal que $p(a)=0$.

Dem: Suponha que $p(z)\neq 0$, $\forall z\in\mathbb{C}$, então a função $f(z)=\frac{1}{p(z)}$ é inteira. Como o polinômio p não é constante então

$\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = \infty \Rightarrow \lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$

(i) Pela definição de limite quando $|z| \to \infty$, existe $R_0 > 0$ tal que $|f(z)| < 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$ com $|z| > R_0$.

(ii) E pela continuidade de f na bola fechada $\overline{B}(0, R_0)$, existe $M > 1$ tal que $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in \overline{B}(0, R_0)$

De (i) e (ii) temos $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Segue do teorema de Liouville que f é constante e portanto p é constante, o que contradiz a hipótese. ∎

Teorema: Seja $G \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo e $f: G \to \mathbb{C}$ uma função analítica. As seguintes afirmações são equivalentes

(a) $f \equiv 0$

(b) $\exists a \in G$; $f^{(n)}(a) = 0$, $\forall n \geq 0$

(c) O conjunto $\{z \in G;\ f(z) = 0\}$ tem um ponto de acumulação em G.

Dem: Obviamente (a) $\Rightarrow$ (b) e (a) $\Rightarrow$ (c). Vamos provar que (c) $\Rightarrow$ (b) e (b) $\Rightarrow$ (a).

(c) $\Rightarrow$ (b) Seja $Z = \{z \in G;\ f(z) = 0\}$ e $a \in G$ um ponto de acumulação de Z. Como G é aberto, existe $R > 0$ tal que $B(a, R) \subset G$. Como a é ponto de acumulação de Z então existe uma sequência de pontos distintos $z_n \in G$ tal que $z_n \to a$. Pela continuidade de f temos $f(a) = \lim f(z_n) = 0$. Suponha que $f^{(k)}(a) \neq 0$, para algum natural $k \geq 1$ e seja $k = n$ o menor natural com essa propriedade, ou seja, suponha que

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad e \quad f^{(n)}(a) \neq 0$$

Como f é analítica na bola $B(a, R)$ então podemos expandir f em série de potências (lembrando que $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$) logo

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-a)^k \quad , \text{ para } |z-a| < R$$

Considere agora a função

$$g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-a)^{k-n}$$

então:

(i) g é analítica em $B(a,R)$
(ii) $f(z) = (z-a)^n g(z)$
(iii) $g(a) = a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \neq 0$

Pela continuidade de g, existe r_0, $0 < r_0 < R$, tal que

$$g(z) \neq 0, \text{ para } |z-a| < r_0$$

Porém o ponto $a = \lim z_n$ com $f(z_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, para o $r_0 > 0$ acima, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$z_n \neq a, \ |z_n - a| < r_0 \text{ e } f(z_n) = 0$$

o que nos eleva a seguinte contradição: $0 = f(z_n) = \underbrace{(z_n-a)}_{\neq 0} \underbrace{g(z_n)}_{\neq 0}$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Seja $A = \{z \in G ; f^{(n)}(z) = 0, \forall n \geq 0\}$. Por hipótese $A \neq \emptyset$. Vamos mostrar que A é aberto e fechado em G, o que implicará em $A = G$ pela conexidade de G, e consequentemente $f \equiv 0$ em G.

Para provar que A é fechado, seja $z \in \bar{A}$ e $\{z_k\}$ uma sequência de pontos de A tal que $\lim_{k\to\infty} z_k = z$

Como $f^{(n)}$ é contínua, para todo $n \geq 0$, então $f^{n}(z) = \lim_{k\to\infty} f^{(n)}(z_k) = 0$
$\Rightarrow z \in \bar{A}$. Logo $A = \bar{A}$ e A é fechado.

Para provar que A é aberto, seja $a \in A$ e $R > 0$ tal que $B(a,R) \subset G$
Como f é analítica em $B(a,R)$ então

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \text{ para } |z-a| < R$$

com $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) = 0$, $\forall n \geq 0 \Rightarrow f(z) = 0$, $\forall z \in B(a,R) \rightarrow B(a,R) \subset A$.
Isso mostra que A é aberto e conclui a prova do teorema. ■

<u>Corolário</u>: Sejam f e g funções analíticas na região G então

$$f \equiv g \iff \{z \in G ; f(z) = g(z)\} \text{ tem ponto de acumulação.}$$

<u>Corolário</u>: Se $f: G \to \mathbb{C}$ é analítica e $a \in G$ é tal que $f(a) = 0$ então $\exists R > 0$ tal que $B(a,R) \subset G$ e $f(z) \neq 0$, $\forall z \in B(a,R) - \{a\}$.