Aula 8
01
15/01/16

O índice de uma curva

Se f é analítica em $G \subset \mathbb{C}$, $B(a,r) \subset G$ $(r>0)$ e $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, então já foi mostrado que $\int_\gamma f(z)dz = 0$ e

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw \quad \text{, para } |z-a|<r$$

Em particular, tomando $f \equiv 1$ temos $\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = 1$, se $|z-a|<r$, e quando $\gamma_m(t) = a + e^{int}$, $0 \le t \le 2\pi$ e $m \in \mathbb{Z}$ temos

$$\int_{\gamma_m} \frac{dw}{w-a} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)\,dt}{\gamma(t)-a} = 2\pi i m \qquad (1)$$

Nosso primeiro resultado mostra que esse fato acima não é uma virtude da curva γ, ou seja, para qualquer curva suave γ teremos (1).

Teorema: Se $\gamma:[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma curva suave fechada e $a \notin \{\gamma\}$ então

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} \in \mathbb{Z}$$

Dem: Considere a função $g:[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a}\,ds$$

então $g(0)=0$, $g(1) = \int_\gamma (z-a)^{-1}dz$ e pelo TFC temos $g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}$, $0 \le t \le 1$.
logo

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-g(t)}(\gamma(t)-a)\right) = e^{-g(t)}(-g'(t))(\gamma(t)-a) + e^{-g(t)}\gamma'(t)$$
$$= e^{-g(t)}\left(-\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}(\gamma(t)-a) + \gamma'(t)\right) = 0$$

e portanto a função

$$h(t) = e^{-g(t)}(\gamma(t)-a) \text{ é constante}$$

Em particular $h(1) = h(0) \Leftrightarrow e^{-g(1)}(\gamma(1)-a) = e^{-g(0)}(\gamma(0)-a)$. Como $\gamma(1) = \gamma(0)$ e $g(0)=0$ então $e^{-g(1)}(\gamma(0)-a) = \gamma(0)-a \neq 0$

$$\Rightarrow e^{-g(1)} = 1 \Rightarrow g(1) = 2\pi i n,\ n \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Def: Se $\gamma:[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma curva suave e $a \notin \{\gamma\}$ então o número inteiro

$$n(\gamma; a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

é chamado de índice de γ no ponto a.

Se $\gamma, \sigma : [0,1] \to \mathbb{C}$ são curvas suaves, definimos as curvas $-\gamma$ e $\gamma+\sigma$ da seguinte forma

(i) $-\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$; $(-\gamma)(t) = \gamma(1-t)$, $0 \le t \le 1$.

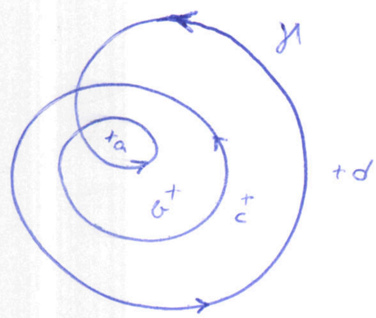
(ii) Se $\gamma(1) = \sigma(0)$ então $\gamma + \sigma : [0,1] \to \mathbb{C}$

$$(\gamma+\sigma)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & \text{se } 0 \le t \le 1/2 \\ \gamma(1-2t), & \text{se } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

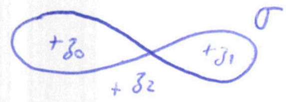
Proposição: $\eta(\gamma; a) = -\eta(-\gamma; a)$ e $\eta(\gamma+\sigma; a) = \eta(\gamma; a) + \eta(\sigma; a)$
(exercício)

Seja γ uma curva suave e considere o aberto $G = \mathbb{C} - \{\gamma\}$. Como $\{\gamma\}$ é um compacto então $\{\gamma\} \subset B(0,R)$, para algum $R>0$ e portanto $\{z ; |z| > R\} \subset G$, ou seja, G possui uma única componente conexa não limitada.

Exemplo: A curva ao lado divide o plano complexo em 4 componentes conexas (uma não limitada e três limitadas). Note que $\eta(\gamma; d) = 0$, $\eta(\gamma; c) = 1$, $\eta(\gamma; b) = 2$ e $\eta(\gamma, c) = 3$.



Já a curva σ divide o plano em 3 c.c. sendo duas limitadas. Aqui $\eta(\sigma; z_0) = \eta(\sigma; z_1) = 1$.



Teorema: Seja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ uma curva suave. Então $\eta(\gamma; a)$ é constante em cada componente conexa de $G = \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$. Em particular, $\eta(\gamma, a) = 0$, para qualquer a na comp. conexa não limitada de G.

Dem: Considere a função $f : G \to \mathbb{C}$ definida por $f(a) = \eta(\gamma; a)$. Se provarmos que f é contínua então f levará componentes conexas de G em componentes conexas de $f(G) \subset \mathbb{Z}$. Como as componentes conexas de $\mathbb{Z}$ são pontos, seguirá que f é constante em cada componente conexa de G.

Fixado $a \in G$, seja $r = d(a, \{\gamma\})$ e $b \in G$ tal que $|b-a| < \delta < \frac{1}{2}r$ então

$$|f(b) - f(a)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right) dz\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{a-b}{(z-a)(z-b)}\, dz\right| \leq \frac{|a-b|}{2\pi}\int_\gamma \frac{|dz|}{|z-a||z-b|}$$

Note que: $|a-b| < \frac{1}{2}r$, $|z-a| \geq r > \frac{1}{2}r \Leftrightarrow \frac{1}{|z-a|} < \frac{2}{r}$ e $|z-b| > \frac{1}{2}r \Leftrightarrow \frac{1}{|z-b|} < \frac{2}{r}$

logo $\frac{1}{|z-a||z-b|} < \frac{4}{r^2}$ e portanto

$$|f(a) - f(b)| \leq \frac{|a-b|}{2\pi}\int_\gamma \frac{|dz|}{|z-a||z-b|} < \frac{|a-b|}{2\pi}\frac{4}{r^2}\int_\gamma |dz| = \frac{2|a-b|}{\pi r^2}\ell(\gamma)$$

sendo $\ell(\gamma)$ o comprimento de γ.

Agora, dado $\varepsilon > 0$, basta escolher $\delta > 0$ tal que $\frac{2\delta}{\pi r^2}\ell(\gamma) < \varepsilon \Leftrightarrow \delta < \frac{\pi r^2}{2\ell(\gamma)}\varepsilon$ e teremos $|b-a| < \delta \Rightarrow |f(b) - f(a)| < \varepsilon$, ou seja, f é cont. em a.

Agora, se $U \subset G$ é a componente não limitada de G, então $\exists R > 0$ tal que $\mathbb{C} \setminus B(0,R) \subset U$. Dado $\varepsilon > 0$ seja $a \in U$ um ponto tal que $|a| > R$ e $|z-a| > c > 0$ (já diremos quem é $c > 0$), então

$$|n(\gamma; a)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{dz}{z-a}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{|dz|}{|z-a|} < \frac{1}{2\pi}\frac{1}{c}\int_\gamma |dz| = \frac{1}{2\pi c}\ell(\gamma) \overset{(*)}{<} \frac{1}{2}$$

então basta escolher c tal que $\frac{1}{2\pi c}\ell(\gamma) < \frac{1}{2}$, ou seja, $c \overset{(*)}{>} \frac{1}{\pi}\ell(\gamma)$.

Como $n(\gamma; a) \in \mathbb{Z}$, $n(\gamma, a)$ é constante em cada componente conexa de G e existe $a \in U$ com $|n(\gamma; a)| < \frac{1}{2}$, então $n(\gamma; a) = 0$ para qualquer $a \in U$. ■

Teorema e fórmula de Cauchy

Já provamos o teorema de Cauchy para funções analíticas em um disco, ou seja,

"Se G é um disco aberto e $f: G \to \mathbb{C}$ é analítica então $\int_\gamma f = 0$, para qualquer curva suave γ em G".

A pergunta que queremos responder aqui é: para quais tipos de regiões esse resultado permanece válido, pois já vimos exemplos em que esse resultado não vale

Exemplo: Seja $G = \mathbb{C} - \{0\}$ e $f(z) = \frac{1}{z}$, então f é analítica em G porém tomando $\gamma(t) = e^{it}$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, tem-se $\int_\gamma f = 2\pi i$

O problema aqui é que essa região possui um buraco e a curva está envolvendo esse buraco. Antes da resposta a pergunta, enunciaremos o seguinte lema

Lema: Seja γ uma curva suave e φ uma função contínua sobre $\{\gamma\}$. Para cada $m \geq 1$, considere a função

$$F_m(z) = \int_\gamma \varphi(w)(w-z)^{-m} dw, \qquad z \notin \{\gamma\}$$

Nessas condições F_m é analítica em $\mathbb{C} - \{\gamma\}$ com $F_m'(z) = m F_{m+1}(z)$.

Fórmula integral de Cauchy (1ª versão)

Seja $G \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f: G \to \mathbb{C}$ analítica. Se γ é uma curva fechada suave em G tal que $\eta(\gamma; w) = 0$, $\forall w \in \mathbb{C} - G$ então $\forall a \in G - \{\gamma\}$ tem-se

$$\eta(\gamma; a) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz$$

Dem: Defina $\varphi: G \times G \to \mathbb{C}$ por $\varphi(z, w) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$, $z \neq w$, e $\varphi(z,z) = f'(z)$. Então φ é contínua em $G \times G$ e, para cada $w \in G$ fixado, a função $z \in G \longmapsto \varphi(z, w)$ é analítica

Seja $H = \{w \in \mathbb{C};\ \eta(\gamma; w) = 0\}$. Como a função $w \in \mathbb{C} \mapsto \eta(\gamma, w)$ é contínua e assume apenas valores inteiros então H é aberto (basta ver que $H = \phi^{-1}((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ com $\phi(w) = \eta(\gamma; w)$). Além disso $H \cup G = \mathbb{C}$ (obviamente não é uma reunião disjunta)

Defina $g\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \begin{cases} \int_\gamma \varphi(z, w)\, dw, & \text{se } z \in G \\ \int_\gamma \frac{f(w)}{z - w} dw, & \text{se } z \in H \end{cases}$$

se $z \in G \cap H$ então

$$\int_\gamma \varphi(z, w)\, dw = \int_\gamma \frac{f(z) - f(w)}{z - w} dw = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - w} dw - \int \frac{f(w)}{z - w} dw$$

$$= -f(z) \underbrace{\eta(\gamma; z)}_{=0\ (z \in H)} 2\pi i + \int \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw$$

logo g está bem definida.

Pelo lema acima g é analítica em $\mathbb{C}$, em particular, $H \subset \mathbb{C} - \{\gamma\}$ e portanto H está contido ~~na componente conexa não limitada~~ de $\mathbb{C} - \{\gamma\}$.

Como f é limitada em $\{\gamma\}$ (pois f é contínua e $\{\gamma\}$ compacto) e $\lim_{z \to \infty} (w - z)^{-1} = 0$ uniformemente, para $w \in \{\gamma\}$, então

$$(*) \quad \lim_{z \to \infty} g(z) = \lim_{z \to \infty} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw = 0$$

Isso também implica que $\exists R > 0$ tal que $|g(z)| \leq 1$, $\forall |z| \geq R$. Como g também é limitada em $\overline{B}(0, R)$ então g é uma função inteira e limitada. Segue do teorema de Liouville que g é constante, e por $(*)$, $g \equiv 0$.

Portanto se $a \in G - \{\gamma\}$ temos

$$0 = g(a) = \int_\gamma \frac{f(z) - f(a)}{z - a}\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\, dz - f(a) \int_\gamma \frac{dz}{z - a}. \quad \blacksquare$$

Fórmula integral de Cauchy (versão mais geral)

Seja $G \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f: G \to \mathbb{C}$ uma função analítica. Se $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ são curvas suaves em G tais que $\sum_{j=1}^{m} \eta(\gamma_j, w) = 0$, $\forall w \in \mathbb{C} - G$ então para $a \in G - \{\gamma\}$ tem-se

$$f(a) \sum_{k=1}^{m} \eta(\gamma_k; a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z - a}\, dz$$

Teorema de Cauchy: Com as mesmas hipóteses do teorema acima

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} f(z)\, dz = 0$$

Dem: usar $f(z)(z-a)$ como $f(z)$ no teorema anterior.

Exemplo: $G = \{z \in \mathbb{C};\ R_1 < |z| < R_2\}$, $\gamma_1(t) = r_1 e^{+it}$, $\gamma_2(t) = r_2 e^{-it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$.

Para $|w| \leq R_1$ temos $\eta(\gamma_1, w) = 1$ e $\eta(\gamma_2, w) = -1$

$|w| \geq R_2$ temos $\eta(\gamma_1; w) = \eta(\gamma_2; w) = 0$

Logo $\eta(\gamma_1; w) + \eta(\gamma_2; w) = 0$, $\forall w \in \mathbb{C} - G$.