Teorema de Morera

Aula 9
01
18/01/16

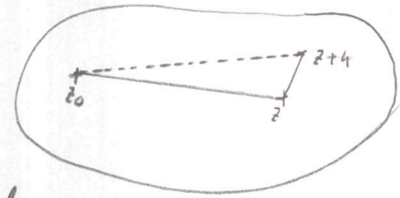
Prop.: Seja $G \subset \mathbb{C}$ um aberto convexo e $f: G \to \mathbb{C}$ analítica então f admite uma primitiva em G.

Dem: Seja $z_0 \in G$ um ponto qualquer e defina $F: G \to \mathbb{C}$ pondo

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(w)\,dw$$

então F está bem definida e só resta provar que $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in G$.

Seja $h \in \mathbb{C}$ com $|h|$ suficientemente pequeno para que $z+h \in G$ então $[z, z+h] \subset G$ e $F(z+h) = \int_{[z_0, z+h]} f(w)\,dw$



Note que o triângulo T com vértices em z_0, z e $z+h$ está contido em G, logo

$$0 \overset{\text{T. DE CAUCHY}}{=} \int_T f(w)\,dw = \underbrace{\int_{[z_0, z]} f}_{=F(z)} + \int_{[z, z+h]} f - \underbrace{\int_{[z_0, z+h]} f}_{=F(z+h)}$$

assim

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f$$

e

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(w)\,dw - f(z) \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} dw \right|$$

$$\leq \frac{1}{|h|} \int_{[z, z+h]} |f(w) - f(z)|\,|dw|$$

Como f é contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|w - z| < \delta \Rightarrow |f(w) - f(z)| < \varepsilon$. Em particular, como $w \in [z, z+h]$ então para $0 < |h| < \delta$ temos $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$ e

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon \implies F'(z) = f(z), \forall z \in G. \blacksquare$$

Dizemos que T é um caminho triangular se T for uma poligonal fechada com três lados.

Teorema (Morera). Seja $G \subset \mathbb{C}$ uma região e $f: G \to \mathbb{C}$ contínua. Se $\int_T f = 0$, para qualquer caminho triangular T em G então f é analítica em G.

Dem. Basta provar que para cada $z_0 \in G$ existe $\delta > 0$ tal que f é analítica em $B(z_0, \delta)$. Logo sem perda de generalidade podemos supor que $G = B(a, r)$, com $r > c$.

Agora basta repetir todos os passos da demonstração acima, usando o fato que $\int_T f = 0$ em vez do Teorema de Cauchy, para concluir que f tem uma primitiva em $B(a, r)$ e portanto F é derivável em a. Daqui temos que F é analítica em $B(a,r) \Rightarrow f$ é analítica em $B(a, r)$. ■

Versão homotópica do teorema de Cauchy

Def: Sejam $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow G$ duas curvas fechadas suaves em uma região G. Dizemos que γ_0 é homotópica a γ_1 em G se existe uma função contínua $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow G$ tal que

$$\begin{cases} \Gamma(s,0) = \gamma_0(s), \quad \Gamma(s,1) = \gamma_1(s), \quad 0 \leq s \leq 1 \\ \Gamma(0,t) = \Gamma(1,t) \end{cases}$$

Se, para cada $t \in (0,1)$ definirmos $\gamma_t(s) = \Gamma(s,t)$, teremos uma família de curvas fechadas que "começam em γ_0 e termina em γ_1"

Se γ_0 e γ_1 forem homotópicas, escreveremos $\gamma_0 \sim \gamma_1$ (exercício: mostrar que $\sim$ é uma relação de equivalência no conjunto das curvas suaves em G)

Def: Dizemos que G é convexo se $[a,b] \subset G$, $\forall a, b \in G$

Dizemos que G é a-estrelado se $[a,z] \subset G$, $\forall z \in G$

Proposição: Seja G um conjunto aberto a-estrelado. Se γ é uma curva em G fechada e suave então $\gamma \sim a$

Dem: Basta definir $\Gamma(s,t) = t\gamma(s) + (1-t)a$, $0 \leq t, s \leq 1$. Assim teremos $\Gamma(s,t) \in G$, $\forall s,t \in [0,1]$, $\Gamma(s,0) = a$ e $\Gamma(s,1) = \gamma(s)$. ■

Dizemos que $\gamma \sim 0$ quando γ for homotópica a um ponto.

Teorema de Cauchy homotópico. Seja $f : G \to \mathbb{C}$ uma função analítica e γ uma curva suave fechada em G. Se $\gamma \sim 0$ então $\int_\gamma f = 0$.

Versão mais geral: Se $f: G \to \mathbb{C}$ é analítica e γ_0 e γ_1 são curvas suaves fechadas homotópicas então $\int_{\gamma_0} = \int_{\gamma_1} f$.

Dem. Seja $\Gamma = \Gamma(s,t)$ a função contínua que estabelece a homotopia entre γ_0 e γ_1 e suponha que Γ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas (hipótese restritiva) então $\partial^2\Gamma/\partial s\partial t = \partial^2\Gamma/\partial t \partial s$ em $[0,1]\times[0,1]$.

Defina

$$g(t) = \int_0^1 f(\Gamma(s,t))\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,t)\,ds$$

então $g(0) = \int_{\gamma_0} f$ e $g(1) = \int_{\gamma_1} f$. Como o integrando é continuamente diferenciável, pela regra de Leibniz temos

$$\begin{aligned} g'(t) &= \int_0^1 \left(f'(\Gamma(s,t))\frac{\partial \Gamma}{\partial t}\frac{\partial \Gamma}{\partial s} + f(\Gamma(s,t))\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial s}\right) ds \\ &= \int_0^1 \left(f'(\Gamma(s,t))\frac{\partial \Gamma}{\partial s}\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + f(\Gamma(s,t))\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s \partial t}\right) ds \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\left(f(\Gamma(s,t))\frac{\partial \Gamma}{\partial t}\right) ds \\ &= f(\Gamma(1,t))\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(1,t) - f(\Gamma(0,t))\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(0,t) = 0 \end{aligned}$$

$\Gamma(1,t) = \Gamma(0,t),\ \forall t \in [0,1]$

Como $g'(t) = 0,\ \forall t \in [0,1]$ então g é constante, em particular $g(1) = g(0)$, ou seja, $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$. ■

Definição: Sejam $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to G$ duas curvas suaves tais que

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a \quad \text{e} \quad \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b$$

diremos que γ_0 e γ_1 são homotópicas com extremos fixados se existe $\Gamma: [0,1]\times[0,1] \to G$ tal que

$$\Gamma(s,0) = \gamma_0(s) \quad \text{e} \quad \Gamma(s,1) = \gamma_1(s), \quad \forall s \in [0,1]$$
$$\Gamma(0,t) = a \quad \text{e} \quad \Gamma(1,t) = b, \quad \forall t \in [0,1]$$

A relação de homotopia com extremos fixados também é uma relação de equivalência.

Teorema (independência do caminho de integração) Se γ_0 e γ_1 são curvas suaves em G conectando os pontos a e b e são homotópicas com os extremos fixados então $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$ para qualquer $f: G \to \mathbb{C}$ analítica.

Def: dizemos que um conjunto aberto $G \subset \mathbb{C}$ é simplesmente conexo se qualquer curva suave fechada em G for homotópica a 0.

Teorema de Cauchy (4ª versão) Se G é simplesmente conexo e $f: G \to \mathbb{C}$ é analítica então $\int_\gamma f = 0$, para qualquer curva suave fechada γ em G.

Corolário: Se G é simplesmente conexo e $f: G \to \mathbb{C}$ é analítica então f tem primitiva em G.

Dem: Fixado $a \in G$, sejam γ_1 e γ_2 dois caminhos suaves quaisquer conectando a e um ponto $z \in G$. Pelo teorema acima $\int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} f = 0$, portanto a função $F: G \to \mathbb{C}$ dada por $F(z) = \int_\gamma f$, está bem definida, qualquer que seja o caminho γ conectando os pontos a e z.

O restante da prova consiste em mostrar que $F' = f$ usando os mesmos argumentos da primeira proposição provada nessa aula, para o caso convexo. ■

Corolário: Se G é simplesmente conexo e $f: G \to \mathbb{C}$ é analítica, com $f(z) \neq 0$, $\forall z \in G$, então $\exists\, g: G \to \mathbb{C}$ analítica tal que

$$f(z) = e^{g(z)}$$

Além disso, se $z_0 \in G$ e $f(z_0) = e^{w_0}$, podemos escolher g de modo que $g(z_0) = w_0$

Dem: Como f nunca se anula então f'/f é analítica em G e, pelo corolário acima, tem primitiva g_1 em G. Defina $h(z) = e^{g_1(z)}$, então h é analítica e nunca se anula. Dessa forma f/h é analítica com derivada

$$\frac{h(z) f'(z) - h'(z) f(z)}{(h(z))^2}$$

Mas $h' = g_1' h$ e portanto $hf' - fh' = 0 \Rightarrow f/h$ é constante em G.

Assim $f(z) = c\,h(z) = c\,e^{g_1(z)} = e^{g_1(z) + c'}$, para algum c' conveniente.

Tomando $g(z) = g_1(z) + c' + 2k\pi i$, para um $k \in \mathbb{Z}$ conveniente, temos $g(z_0) = w_0$ e $f(z) = e^{g(z)}$, $\forall z \in G$. ■