# 2ª lista de exercícios - CM068 Variáveis Complexas - 14/03/2016

1. Encontre as partes real e imaginária das seguintes funções

   (a) $f(z) = z^2 + 5z + i + 1$

   (b) $f(z) = \dfrac{z+i}{z^2+1}$

   (c) $f(z) = \dfrac{1}{z}$

   (d) $f(z) = \dfrac{z^2+3}{|z-1|}$

   (e) $f(z) = e^{z^2}$

   (f) $f(z) = \exp(\exp z)$

   (g) $f(z) = \operatorname{sen}(z + \overline{z})$

2. Encontre todas as soluções das equações:

   (a) $\cos z = 2$

   (b) $e^z = i$

   (c) $z^6 + 1 = 0$

   (d) $\tan z = i$

3. Calcule os limites abaixo:

   (a) $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{iz^3-1}{z+i}$

   (b) $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{z^2+1}{z^4-1}$

   (c) $\displaystyle\lim_{z\to 3i} \frac{z^2+9}{z-3i}$

   (d) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|+1}$

   (e) $\displaystyle\lim_{z\to 0} e^{-1/|z|}$

   (f) $\displaystyle\lim_{z\to 1+i} \frac{z^2+1}{z^3+1}$

4. Se $f(z) = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{1+|z|}$ então $f$ é contínua em $z = 0$? Por que?

5. Seja $f(z) = e^{-1/|z|}$, $z \neq 0$. É possível definir $f(0)$ de modo que $f$ seja contínua em $z = 0$? Justifique.

6. Calcular a derivada $f'(z)$ nos seguintes casos

   (a) $f(z) = \frac{z-1}{2z+1}$, $z \neq -\frac{1}{2}$

   (b) $f(z) = z^2(1+z^{-2})^4$, $z \neq 0$

   (c) $f(z) = \operatorname{sen}(\cos z)$

7. Mostre que $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ não tem derivada em nenhum ponto. O mesmo é verdade para $f(z) = \mathrm{Im}(z)$?

8. Determine os pontos onde as funções abaixo são deriváveis e encontre sua derivada nesses pontos.

   (a) $f(z) = \cos z$

   (b) $f(z) = e^{|z|}$

   (c) $f(x,y) = xy + iy$

   (d) $f(z) = 1/z$

   (e) $x^2 + y^2 i$

   (f) $f(z) = z\mathrm{Im}\, z$

   (g) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$

9. No exercício anterior, verifique se as funções são analíticas em algum subconjunto de $\mathbb{C}$. Encontre, em cada um dos itens, o maior subconjunto no qual $f$ é analítica.

10. Sejam $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe $C^1$. Se $u$ e $v$ satisfazem as condições de Cauchy-Riemann mostre o mesmo ocorrerá com $u_1$ e $v_1$ nos seguintes casos:

    (a) $u_1 = u^2 - v^2$, $v_1 = 2uv$

    (b) $u_1 = e^u \cos v$, $v_1 = e^u \operatorname{sen} v$

    (c) $u_1 = -v$, $v_1 = u$

11. Verifique que se $f$ é função inteira e só assume valores reais então $f$ é constante.

12. Verifique que se $f$ e $\overline{f}$ são analíticas então $f$ é constante.