3ª lista de exercícios - CM068 Variáveis Complexas - 23/03/2016

1. Calcular f' nos seguintes casos

   (a) $f(z) = \dfrac{z-1}{2z+1}$, $z \neq -\dfrac{1}{2}$ (b) $f(z) = z^2(1+z^{-2})^4$, $z \neq 0$ (c) $f(z) = \operatorname{sen}(\cos z)$

2. Mostre que $f(z) = \Re z$ não tem derivada em nenhum ponto. O mesmo é verdade para $f(z) = \Im z$?

3. Determine os pontos onde as funções abaixo são deriváveis e encontre sua derivada nesses pontos.

   (a) $\cos z$
   (b) $e^{|z|}$
   (c) $xy + iy$
   (d) $1/z$
   (e) $e^{-y}(\cos x + i\operatorname{sen} x)$
   (f) $\operatorname{sen} x + \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$
   (g) $x^2 + iy^2$
   (h) $z\,\operatorname{Im}(z)$
   (i) $\dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$

4. Sejam u, $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1. Se u e v satisfazem as condições de Cauchy-Riemann mostre o mesmo ocorrerá com u_1 e v_1 nos seguintes casos:

   (a) $u_1 = u^2 - v^2$, $v_1 = 2uv$ (b) $u_1 = e^u \cos v$, $v_1 = e^u \operatorname{sen} v$ (c) $u_1 = -v$, $v_1 = u$

5. Faça um esboço da família de curvas $u = \operatorname{Re} f = c_1$ e $v = \operatorname{Im} f = c_2$ para $f(z) = 1/z$ e observe a ortogonalidade entre essas curvas.

6. Verifique que se f é função inteira e só assume valores reais então f deve ser constante.

7. Verifique que se f e $\overline{f}$ são analíticas então f deve ser constante.

8. Encontre uma função inteira f tal que $\operatorname{Re} f(z) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$, $f(0) = 0$, onde $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$.

9. Encontre uma função inteira f tal que $\operatorname{Re} f(z) = e^x(x\cos y - y \operatorname{sen} y)$, $f(0) = 0$, onde $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$.

10. Calcule todos os valores de

    (a) $\log(1-i)$
    (b) $\log \dfrac{1+i}{1-i}$
    (c) i^{1+i}
    (d) $\log(-ei)$
    (e) $(-1)^{1/\pi}$
    (f) $(1-i)^{1+i}$

11. Encontre ramos para as seguintes funções multivalentes

    (a) $f(z) = \sqrt{z-1}$ (b) $h(z) = \log \dfrac{z-1}{z+1}$ (c) $g(z) = \sqrt{z^2-1}$

12. Verifique $\exp(\log z) = z$. No entanto, mostre que, em geral, tem-se $\log(\exp z) \neq z$.

13. Considere a função multivalente $f(z) = -i\log(iz + \sqrt{1-z^2})$. Verifique que f está definida para todo $z \in \mathbb{C}$. Mostre que $\operatorname{sen}(f(z)) = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Calcule a derivada de um ramo de f. Obs. f é definida como a inversa (multivalente) da função seno, isto é, $f = \operatorname{arcsen}$.

14. Repita o exercício acima com a função $g(z) = -i\log(z + \sqrt{z^2-1})$ no lugar de f e a função cosseno no lugar de seno.

15. Considere a função multivalente $h(z) = \frac{i}{2}\log\frac{i+z}{i-z}$. Encontre o maior domínio onde h está definida. Mostre que $\operatorname{tg}(h(z)) = z$. Calcule a derivada de um ramo de h.