

5ª lista de exercícios - CM068 Variáveis Complexas - 02/05/2016

1. Determine o domínio de analiticidade da função f abaixo e aplique o teorema de Cauchy-Goursat para mostrar que $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$, sendo γ o círculo fechado $|z| = 1$.

(a) $f(z) = \frac{z^2}{z-3}$

(b) $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2}$

(c) $f(z) = ze^{-z}$

2. Seja γ_1 o círculo $|z| = 4$, orientado no sentido positivo, e γ_2 o quadrado delimitado pelas retas $\operatorname{Re} z = \pm 1$ e $\operatorname{Im} z = \pm 1$, orientado no sentido negativo. Denotando $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, mostre que $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ quando

(a) $f(z) = 3z^3 + \cos z$

(b) $f(z) = \frac{1}{3z^2 + 1}$

(c) $f(z) = \frac{z}{1 - e^z}$

3. Calcule

(a) $\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$

(a₁) γ é a semicircunferência $|z| = 1$ com $\operatorname{Im} z \geq 0$;

(a₂) γ é a semicircunferência $|z| = 1$ com $\operatorname{Im} z \leq 0$;

(a₃) γ é a circunferência $|z| = 1$.

(b) $\int_{\gamma} \log(z) dz$

(b₁) γ é a circunferência $|z| = 1$ e $\log 1 = 0$;

(b₂) γ é a circunferência $|z| = 1$ e $\log 1 = 2\pi i$.

(c) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 9}$

(c₁) $3i$ está no interior de γ e $-3i$ está no exterior de γ ;

(c₂) $-3i$ está no interior de γ e $3i$ está no exterior de γ ;

(c₃) $\pm 3i$ estão no interior de γ .

4. Calcule $\int_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4 - 1} dz$, sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$.

5. Seja γ uma curva fechada que contém o disco fechado $|z| \leq a$ no seu interior. Calcule

(a) $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2 + a^2} dz$,

(b) $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{ze^z}{(z-a)^3} dz$

6. Seja γ o círculo o quadrado de lados $\operatorname{Re} z = \pm 2$ e $\operatorname{Im} z = \pm 2$ orientado no sentido positivo. Calcule

(a) $\int_{\gamma} \frac{e^{-z}}{z - i\pi/2} dz$

(b) $\int_{\gamma} \frac{z}{2z + 1} dz$

(c) $\int_{\gamma} \frac{\cosh z}{z^4} dz$