6ª lista de exercícios - CM068 Variáveis Complexas - 03/06/2016

1. Estude a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{in\pi/4}}{e^n - 1}$.

2. Verifique que para todo $|z| < 1$ tem-se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^n + z^{n+1}) = 1$.

3. Encontre o desenvolvimento em série de potências em torno de $z_0 = 0$ das funções abaixo e encontre seu raio de convergência.

   (a) e^{z^2};
   (b) $\dfrac{1}{2z-6}$.
   (c) $\cos\sqrt{z}$;
   (d) $\dfrac{1}{(1+8z^3)^3}$;
   (e) $\operatorname{sen} 2z$;

4. Encontre o desenvolvimento em série de potências em torno de $z_0 = 0$ dos ramos das funções abaixo e seu raio de convergência.

   (a) $\log(1 + z^2)$, com $\log 1 = 0$;
   (b) $\operatorname{arctg} z$, com $\operatorname{arctg} 0 = 0$;
   (c) $(1 + z)^p$, $p \in \mathbb{C}$, com $1^p = 1$.

5. Determine o raio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$.

6. Mostre que $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge absolutamente em $|z| \leq 1$, mas a série de $f'(z)$ é divergente em algum ponto de $|z| = 1$.

7. Encontre a série de Laurent em torno de $z = 1$ de $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$.

8. Idem para $f(z) = (z-3)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z+2}\right)$ em torno de $z = -2$.

9. Desenvolva $e^{z/(z-2)}$ em série de Laurent em torno de $z = 2$ e determine o domínio de convergência da série.

10. Encontre a série de Laurent em torno de $z_0 = 0$ e determine se ela converge em cada um dos itens abaixo.

    (a) ze^{1/z^2};
    (b) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 z}{z}$;
    (c) $\dfrac{4-z}{z}$.

11. Verifique, através do desenvolvimento em série de Laurent, se as funções abaixo são inteiras.

(a) $f(z) = z\,\mathrm{sen}\,(1/z)$, se $z \neq 0$ e $f(0) = 1$;

(b) $f(z) = \dfrac{\mathrm{sen}\,\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$, se $z \neq 0$ e $f(0) = 1$.

12. Encontre as ordens do zero $z_0 = 0$ da função f nos seguintes casos:

(a) $f(z) = z^2(e^{z^2} - 1)$;

(b) $f(z) = e^{\mathrm{sen}\,z} - e^{\mathrm{tg}\,z}$.

13. Encontre as ordens de todos os zero das funções abaixo:

(a) $\dfrac{z^2+9}{z^4}$;

(b) $(1 - e^z)(z^2 - 4)^3$;

(c) $\mathrm{sen}^3 z$;

(d) $\mathrm{sen}\, z^3$;

(e) $\dfrac{\mathrm{sen}^3 z}{z}$.

14. Encontre a expressão de f em série de Laurent em do ponto z_0 indicado.

(a) $f(z) = \frac{1}{(z-a)^k}$, onde $a \in \mathbb{C}$ e $z_0 = 0$;

(b) $e^{1/(1-z)}$, $z_0 = 1$;

(c) $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2-1)}$ nas seguintes regiões:

i. $|z| < 1$;

ii. $1 < |z| < 2$;

iii. $2 < |z|$.