1^{a} Prova de Análise Complexa

6/4/2016

1. Seja $z_o = (1 + i\sqrt{3})^8$.

   (a) Encontre $|z_o|$;

   Temos $|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$ e portanto $|z_o| = |(1 + i\sqrt{3})^8| = |1 + i\sqrt{3}|^8 = 2^8$.

   (b) Encontre um argumento de z_o no intervalo $[0, 2\pi)$;

   O argumento de $w = 1 + i\sqrt{3}$ é $\theta = \operatorname{arctg} \sqrt{3}/1 = \pi/3$, pois w está no primeiro quadrante. Logo, $z_o = \left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^8 = 2^8 e^{\frac{8\pi}{3}i} = 2^8 e^{\frac{2\pi}{3}i + 2\pi i} = 2^8 e^{\frac{2\pi}{3}i}$.
   Assim, o argumento de z_o, no intervalo $[0, 2\pi)$, é $\frac{2\pi}{3}$.

   (c) Encontre as duas raízes quadradas de z_o;

   As raizes quadradas de z_o são
   $z_1 = \left(2^8 e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^4 e^{\frac{\pi}{3}i} = 2^3(1 + i\sqrt{3})$ e $z_2 = 2^4 e^{\frac{\pi}{3}i + \pi i} = 2^4 e^{\frac{4\pi}{3}i}$.

2. (a) Encontre uma função inteira f cuja parte real seja

   $$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - x^2 + y^2 + y + 1;$$

   Note que $u_x = 3x^2 - 3y^2 - 2x$ e $u_y = -6xy + 2y + 1$. Pelas equações de Cauchy-Riemann, a função $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ deve satisfazer:

   $$v_y = u_x = 3x^2 - 3y^2 - 2x \quad \text{e} \quad v_x = -u_y = 6xy - 2y - 1. \tag{1}$$

   Integrando a primeira equação acima em relação a y e derivando em x teremos

   $$v(x, y) = 3x^2y - y^3 - 2xy + h(x) \quad \text{e} \quad v_x = 6xy - 2y + h'(x). \tag{2}$$

   Comparando as expressões para v_x obtidas em (1) e (2) concluímos que

   $$h'(x) = -1 \Rightarrow h(x) = -x + k.$$

   Logo $v(x, y) = 3x^2y - y^3 - 2xy - x + k$, sendo $k \in \mathbb{C}$ uma constante, e

   $$f(x + iy) = u + iv = (x^3 - 3xy^2 - x^2 + y^2 + y + 1) + i(3x^2y - y^3 - 2xy - x + k)$$

   é inteira, pois satisfaz as equações de Cauchy-Riemann e as derivadas parciais das partes real e imáginária são contínuas.

   (b) Calcule $f'(0)$ e $f'(i)$.

   Como f é derivável em qualquer ponto temos

   $$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = (3x^2 - 3y^2 - 2x) + i(6xy - 2y - 1)$$

   logo $f'(0) = -i$ e $f'(i) = f'(0 + 1i) = -3 - 3i = -3(1 + i)$.

3. Considere a função

$$f(z) = e^{-i\,\overline{z}}, \;\; z \in \mathbb{C}.$$

(a) Encontre $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$ e $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$.

Como $f(x+iy) = e^{-i\,(x-iy)} = e^{-ix-y} = e^{-y}(\cos x - i \operatorname{sen} x)$ então $u(x,y) = e^{-y}\cos x$ e $v(x,y) = -e^{-y}\operatorname{sen} x$.

(b) Mostre que f não é derivável em nenhum ponto de $\mathbb{C}$.

Se f for derivável em algum ponto, então as partes real e imáginária de f devem satisfazer as equações de Cauchy-Riemann nesse ponto, ou seja, devemos ter $u_x(x,y) = v_y(x,y)$ e $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$ em todos os pontos $z = x+iy$ em que f for derivável. Mas

$$\begin{aligned} u_x &= -e^{-y}\operatorname{sen} x; \quad & v_x &= -e^{-y}\cos x;\\ u_y &= -e^{-y}\cos x; \quad & v_y &= e^{-y}\operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{array}{lclcl} u_x = v_y & \Rightarrow & -e^{-y}\operatorname{sen} x = e^{-y}\operatorname{sen} x & \overset{e^{-y}\neq 0}{\Rightarrow} & -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \;\; \Rightarrow \;\; \operatorname{sen} x = 0 \\ u_y = -v_x & \Rightarrow & -e^{-y}\operatorname{sen} x = e^{-y}\cos x & \overset{e^{-y}\neq 0}{\Rightarrow} & -\cos x = \cos x \;\; \Rightarrow \;\; \cos x = 0 \end{array}$$

Como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x = \cos x = 0$. Logo f não é derivável em nenhum ponto $z = x+iy \in \mathbb{C}$.

4. Sejam $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções inteiras:

(a) Se f assume apenas valores reais, mostre que f é constante;

Note que $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy) = f(x+iy)$ e $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy) = 0$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Das equações de Cauchy-Riemann temos $u_x = v_y = 0$ e $u_y = -v_x = 0$, ou seja, a função real $u = u(x,y)$ tem derivadas nulas em todos os pontos do plano. Como o plano é conexo, segue que a função u é constante, e portanto $f(x+iy) = u(x,y) + i0$ é constante.

(b) Se $|g(z)| = 1$, para todo z, mostre que g é constante.

Sejam $U(x,y) = \operatorname{Re} g(x+iy)$ e $V(x,y) = \operatorname{Im} g(x+iy)$. Como $|g(z)| = 1$ então $(U(x,y))^2 + (V(x,y))^2 = 1$ e derivando em relação a x e y obtemos

$$U.U_x + V.V_x = 0 \;\; \text{e} \;\; U.U_y + V.V_y = 0$$

Como g é inteira, então suas partes real e imaginária satisfazem as equações de Cauchy-Riemann: $U_x = V_y$ e $U_y = -V_x$. Substituindo essas equações nas expressões acima temos

$$\begin{cases} U.V_y + V.V_x = 0 \\ -U.V_x + V.V_y = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} V & U \\ -U & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como o determinante da matriz quadrada acima $U^2 + V^2 \neq 0$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, esse sistema tem uma única solução $V_x = V_y = 0$. Segue da conexidade do plano que $V(x,y)$ é constante. Analogamente $U_x = U_y = 0$ e $U(x,y)$ é constante, e portanto $g = U + iV$ é constante.