2ª Prova de Análise Complexa

25/5/2016

1. Encontre todos os valores complexos z para os quais:

   (a) $\log(z-1) = i\frac{\pi}{2}$

   (b) $e^z = -ie$

   (c) $z = i^{2/\pi}$

2. Calcule
$$\int_\gamma \frac{1-\overline{z}}{iz}\, dz$$
sendo γ o círculo centrado na origem e raio $r = 2$, percorrido no sentido anti-horário.

3. Seja γ o círculo de centro na origem e raio 3, e considere a função
$$f(w) = \int_\gamma \frac{z^2+2}{z-w}\, dz$$
a qual está bem definida para todo $w \in \mathbb{C}$ com $|w| \neq 3$. Calcule $f(2i)$ e $f(3+4i)$.

4. (a) Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica com parte imáginária $v(x, y) = f(x+iy)$, para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Prove que v é harmônica.

   (b) Mostre que a função $v(x, y) = x^2 - 2y^2$ não pode ser a parte imaginária de uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica

5. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto simplesmente conexo e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica. Dê justificativas rápidas para as seguintes afirmações:

   (a) f é de classe C^∞;

   (b) A função derivada f' também é analítica;

   (c) Se F uma primitiva de f e $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ é um caminho, então $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$;