2ª Prova de Análise Complexa - Resolução

25/5/2016

1. Encontre todos os valores complexos z para os quais:

   (a) $\log(z-1) = i\frac{\pi}{2}$

   $e^{\log(z-1)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} = i \;\Rightarrow\; z-1=i$, ou seja $z = 1+i$.

   (b) $e^z = -ie$

   $\log e^z = \log(-ie) = \log|-ie| + i(\arg(-ie)+2k\pi) = \log e + i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)$,

   ou seja, $z = 1 - i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i$, com $k \in \mathbb{Z}$.

   (c) $z = i^{2/\pi}$

   $i^{2/\pi} = e^{\log i^{2/\pi}} = e^{\frac{2}{\pi}\log i} = e^{\frac{2}{\pi}(\log|i| + i(\arg i + 2k\pi))} = e^{\frac{2}{\pi}i(\frac{\pi}{2}+2k\pi))} = e^{i(1+4k)}$, ou seja,

   $i^{2/\pi} = e^{i(1+4k)} = \cos(1+4k) + i\,\mathrm{sen}(1+4k)$ com $k \in \mathbb{Z}$.

2. Calcule

$$\int_\gamma \frac{1-\overline{z}}{iz}\,dz$$

sendo γ o círculo centrado na origem e raio $r=2$, percorrido no sentido anti-horário.

Parametrizando $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, teremos

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1-\overline{z}}{iz}\,dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1-\overline{\gamma(t)}}{i\gamma(t)}\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1-2e^{-it}}{2ie^{it}}2ie^{it}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}\left(1-2e^{-it}\right)\,dt \;=\; \left(t - 2\frac{e^{-it}}{-i}\right)\Bigg|_0^{2\pi} \;=\; 2\pi.\end{aligned}$$

3. Seja γ o círculo de centro na origem e raio 3, e considere a função

$$f(w) = \int_\gamma \frac{z^2+2}{z-w}\,dz$$

a qual está bem definida para todo $w \in \mathbb{C}$ com $|w| \neq 3$. Calcule $f(2i)$ e $f(3+4i)$.

Os pontos $w \in \mathbb{C}$ com $|w| < 3$, estão no interior de γ, logo vale a fórmula integral de Cauchy. Como $g(z) = z^2+2$ é analítica no plano complexo todo então:

$$f(w) = \int_\gamma \frac{z^2+2}{z-w}\,dz = 2\pi i(w^2+2) \;\Rightarrow\; f(2i) = 2\pi i((2i)^2+2) = -4\pi i.$$

Agora, se $w \in \mathbb{C}$ e $|w| > 3$, então a função $h(z) = \frac{z^2+2}{z-w}$ é analítica sobre γ e em seu interior e, pelo teorema de Cauchy-Goursat, a integral sobre γ é nula. Ou seja, $f(w) = 0$, para todo $w \in \mathbb{C}$ com $|w| > 3$. Logo, $f(3+4i) = 0$.

4. (a) Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica com parte imáginária $v(x, y) = f(x+iy)$, para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Prove que v é harmônica.

   Denotando por $u(x, y) = f(x+iy)$ a parte real de f, pelas equações de Cauchy-Riemann temos $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Derivando a primeira dessas equações em relação a y e a segunda em relação a x teremos $u_{xy} = v_{yy}$ e $u_{yx} = -v_{xx}$. Como f é analítica, suas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas, o que implica na igualdade das derivadas mistas. Daqui segue que:

   $v_{yy} = u_{xy} = u_{yx} = -v_{xx} \Rightarrow v_{yy} + v_{xx} = 0$, ou seja, v é harmônica.

   (b) Mostre que a função $v(x, y) = x^2 - 2y^2$ não pode ser a parte imaginária de uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica

   Basta ver que $v_{yy} + v_{xx} = -2 \neq 0$ e portanto v não é harmônica. O resultado segue da contrapositiva do item anterior.

5. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto simplesmente conexo e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica. Dê justificativas rápidas para as seguintes afirmações:

   (a) f é de classe C^∞;

   Dado $z \in \Omega$, seja $\varepsilon > 0$ tal que $D(z, \varepsilon) \subset \Omega$. Pelo teorema de Cauchy para derivadas, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ existe e é contínua, pois em cada $z \in \Omega$ sua derivada é: $f^{(n+1)}(z) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\partial D(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{(w-z)^n} dz.$

   (b) A função derivada f' também é analítica;

   Como $f = u + iv$ é analítica então $f' = u_x + iv_x$. Denotando $U = \mathrm{Re}\, f'$ e $V = \mathrm{Im}\, f'$, como u e v são de classe C^∞, segue das equações de Cauchy-Riemann que:

   $V_y = (v_x)_y = (v_y)_x = (u_x)_x = U_x$ e $-V_x = -(v_x)_x = -(-u_y)_x = (u_x)_y = U_x$.

   Logo U e V satisfazem as equações de Cauchy-Riemann e tem derivadas parciais contínuas, portanto $f' = U + iV$ é analítica.

   (c) Se F uma primitiva de f e $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ é um caminho, então $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$;

   Como f é analítica e Ω é simplesmente conexo então sua integral não depende do caminho, logo $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$.