2ª Prova - Complementos da Matemática - 24/10/2016 - Noite

1. Considere o conjunto $D = \{\varnothing, \{0,1\}, 2\}$. Assinale verdadeiro (V) ou falso (F) nas alternativas abaixo. Não é preciso justificar:

a. (V) $\varnothing \in D$

b. (V) $\varnothing \subset D$

c. (V) $\{\varnothing\} \subset D$

d. (F) $0 \in D$

e. (V) $2 \in D$

f. (F) $\{0\} \subset D$

g. (F) $\{0\} \in D$

h. (V) $\{2\} \subset D$

i. (V) $\{0,1\} \in D$

j. (F) $\{0,1\} \subset D$

k. (V) $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(D)$

l. (F) $\{0\} \in \mathcal{P}(D)$

m. (V) $\{2\} \in \mathcal{P}(D)$

n. (F) $\{0,1\} \in \mathcal{P}(D)$

o. (V) $\big\{\{0,1\}\big\} \in \mathcal{P}(D)$

2. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Quando for verdadeira faça sua demonstração, e quando for falsa dê um contra-exemplo.

   (a) Se $A \cap B = A \cap C$ então $B = C$. Falsa. Contra-exemplo: $A = \{1\}, B = \{1,2\}$ e $C = \{1,3\}$, assim $A \cap B = A \cap C = \{1\}$ e $B \neq C$.

   (b) Se $A \subset B$ então $A \cup B = B$. Verdadeira. Como $B \subset A \cup B$, basta mostrar que $A \cup B \subset B$. Mas $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ ou $x \in B \overset{A \subset B}{\Longrightarrow} x \in B$ ou $x \in B \Rightarrow x \in B$. Dessa forma, qualquer $x \in A \cup B$ também é elemento de B, ou seja, $A \cup B \subset B$.

   (c) Se $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$ Verdadeira. A implicação $(\Leftarrow)$ é evidente. Para provar $(\Rightarrow)$, seja $x \in A$ um elemento qualquer. Então $x \in A \overset{A \subset A \cup B}{\Longrightarrow} x \in A \cup B \overset{A \cup B = A \cap B}{\Longrightarrow} x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B \Rightarrow x \in B$. Isso prova que $A \subset B$. Começando com $x \in B$ teremos $x \in A \cup B = A \cap B$, e portanto $x \in A$, ou seja, $B \subset A$. Logo $A = B$.

3. Prove que,

   (a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow \sim \big(x \in A \cap B\big) \Leftrightarrow \sim \big(x \in A \text{ e } x \in B\big)$ $\Leftrightarrow \sim (x \in A)$ ou $\sim (x \in B)$ $\Leftrightarrow$ $x \notin A$ ou $x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c$ ou $x \in B^c$ $\Leftrightarrow$ $x \in A^c \cup B^c$

   (b) $(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$. $(x,y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ e $y \in (B \cup C)$ $\Leftrightarrow x \in A$ e $(y \in B$ ou $y \in C) \Leftrightarrow (x \in A$ e $y \in B)$ ou $(x \in A$ e $y \in C)$ $\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B$ ou $(x,y) \in A \times C \Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

   (c) $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$ A implicação $(\Leftarrow)$ é evidente. Para provar $(\Rightarrow)$ sejam $x \in A$ e $y \in B$ dois elementos quaisquer. Como $A \times B = B \times A$ então $x \in A \Rightarrow (x,y) \in A \times B \Rightarrow (x,y) \in B \times A \Rightarrow x \in B$ e $y \in A \Rightarrow x \in B$, isso mostra que $A \subset B$. Começando com $y \in B$ e repetindo as ideias acima teremos $y \in A$ e portanto $B \subset A$. Isso mostra que $A = B$.

4. Seja $\mathcal{B} = \{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma família de conjuntos.

   (a) Escreva a definição de união de família; A união de uma família indexada $\mathcal{B} = \{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é o conjunto $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ formado por todos os elementos que se encontram em um ou mais dos conjuntos B_λ da família, ou seja $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = \{x; (\exists \lambda \in \Lambda)\ x \in B_\lambda\}$. Dessa forma

$$x \in \bigcup_{i \in I} B_i \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda,\ x \in B_\lambda.$$

(b) Mostre que $A \times \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \times B_\lambda)$.

$$(x, y) \in A \times \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \Leftrightarrow x \in A \text{ e } y \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \Leftrightarrow x \in A \text{ e } \Big(\exists \lambda \in \Lambda,\ y \in B_\lambda\Big)$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda,\ x \in A \text{ e } y \in B_\lambda \ \Leftrightarrow\ \exists \lambda \in \Lambda,\ (x, y) \in A \times B_\lambda \Leftrightarrow (x, y) \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \times B_\lambda)$$