2ª Prova - Complementos da Matemática - 24/10/2016

1. Considere o conjunto $D = \{\varnothing, \{0\}, 1\}$. Assinale verdadeiro (V) ou falso (F) nas alternativas abaixo. Não é preciso justificar:

a. (V) $\varnothing \in D$	d. (F) $0 \in D$	g. (V) $\{\{0\}\} \subset D$	j. (V) $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(D)$
b. (V) $\varnothing \subset D$	e. (V) $\{0\} \in D$	h. (V) $1 \in D$	k. (F) $\{0\} \in \mathcal{P}(D)$
c. (V) $\{\varnothing\} \subset D$	f. (F) $\{0\} \subset D$	i. (F) $\{1\} \in D$	l. (V) $\{1\} \in \mathcal{P}(D)$

2. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Quando for verdadeira faça sua demonstração, e quando for falsa dê um contra-exemplo.

   (a) Se $A \cup B = A \cup C$ então $B = C$. Falsa. Contra-exemplo: $A = \{1, 2\}, B = \{1\}$ e $C = \{2\}$, assim $A \cup B = A \cup C = \{1, 2\}$ e $B \neq C$.

   (b) Se $A \subset B$ então $A \cup B = B$. Verdadeira. Como $B \subset A \cup B$, basta mostrar que $A \cup B \subset B$. Mas $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ ou $x \in B \overset{A \subset B}{\Longrightarrow} x \in B$ ou $x \in B \Rightarrow x \in B$. Dessa forma, qualquer $x \in A \cup B$ também é elemento de B, ou seja, $A \cup B \subset B$.

   (c) Se $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$ Verdadeira. A implicação $(\Leftarrow)$ é evidente. Para provar $(\Rightarrow)$, seja $x \in A$ um elemento qualquer. Então $x \in A \overset{A \subset A \cup B}{\Longrightarrow} x \in A \cup B \overset{A \cup B = A \cap B}{\Longrightarrow} x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B \Rightarrow x \in B$. Isso prova que $A \subset B$. Começando com $x \in B$ teremos $x \in A \cup B = A \cap B$, e portanto $x \in A$, ou seja, $B \subset A$. Logo $A = B$.

3. Prove que,

   (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in B \cup C$
   $\Leftrightarrow x \in A$ e $(x \in B$ ou $x \in C) \Leftrightarrow (x \in A$ e $x \in B)$ ou $(x \in A$ e $x \in C)$
   $\Leftrightarrow (x \in A \cap B)$ ou $(x \in A \cap C) \Leftrightarrow\ x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   (b) se $B \subset C$ então $A \times B \subset A \times C$. $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A$ e $y \in B$. Como $B \subset C$ então $x \in A$ e $y \in C \Leftrightarrow (x, y) \in A \times C$.

   (c) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ $(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ e $y \in (B \cup C)$
   $\Leftrightarrow x \in A$ e $(y \in B$ ou $y \in C) \Leftrightarrow (x \in A$ e $y \in B)$ ou $(x \in A$ e $y \in C) \Leftrightarrow (x, y) \in A \times B$ ou $(x, y) \in A \times C \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

4. Seja $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma família de conjuntos. Mostre que $A \times \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \times B_n)$

$$(x, y) \in A \times \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \Leftrightarrow x \in A \text{ e } y \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \Leftrightarrow x \in A \text{ e } \Big(\exists n \in \mathbb{N},\ y \in B_n\Big)$$

$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ x \in A \text{ e } y \in B_n \ \Leftrightarrow\ \exists n \in \mathbb{N},\ (x, y) \in A \times B_n \Leftrightarrow (x, y) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \times B_n)$$