Introdução a Teoria de Conjuntos

para estudantes que estão ingressando na Matemática

Prof. Alexandre Kirilov

14 de novembro de 2017

Alerta:

Esse texto é baseado no roteiro usado pelo professor da disciplina para organizar suas aulas, logo está incompleto em vários aspectos. Certamente você encontrará erros de digitação, erros gramaticais, de notação etc.

Caso encontre qualquer problema, por favor me avise para que eu possa corrigir nas próximas versões. Vale ressaltar que a disposição dos conteúdos é fortemente inspirada nas obras do Prof. Edgard de Alencar Filho.

Sumário

Introdução

Uma das características mais marcantes da Matemática é o extensivo uso de notações para expressar ideias e conceitos dessa ciência. A capacidade de compreender e se expressar usando esses símbolos e criar sua própria notação é fundamental para o seu desenvolvimento matemático.

Mas atenção: conhecer símbolos matemáticos e saber usá-los corretamente, não significa que você é um matemático ou sabe fazer matemática. Assim como conhecer a notação musical não significa que você é um músico ou sabe fazer música. Por outro lado, não conhecer a notação matemática ou não saber usá-la do modo correto poderá lhe trazer dificuldades de aprendizado (de novas ideias matemáticas) e impedir você de desenvolver todo o seu potencial.

Nessas notas de aula pretendo mostrar a vocês quais são as bases do raciocínio lógico usado pelos matemáticos e o uso correto dessas notações, ajudando-os a alcançar seus objetivos na Matemática.

Capítulo 1

Conjuntos

1.1 Noção de conjunto

A noção de conjunto, fundamental na Matemática atual, não é suscetível de definição precisa a partir de noções mais simples, em outras palavras, conjunto é uma noção primitiva.

Intuitivamente, por "conjunto" entenderemos qualquer coleção bem definida de objetos distinguíveis, não importando sua natureza. Os objetos que constituem um conjunto são chamados de **elementos do conjunto**.

Exemplo 1.1.

1. No conjunto das vogais do alfabeto, cada uma das vogais é um elemento;

2. No conjunto dos alunos de uma disciplina, cada um dos alunos é um elemento;

3. Uma reta pode ser considerada um conjunto dos pontos, neste caso cada ponto dessa reta é um elemento do conjunto.

É costume denotar conjuntos usando letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas. Por exemplo: o conjunto A cujos elementos são a, b e c, será representado pela notação:

$$A = \{a, b, c\}$$

que deve ser lida: "A é o conjunto cujos elementos são a, b e c ". Note que os elementos são separados por vírgulas e delimitados por chaves.

Também é costume dos matemáticos denominar conjuntos por "letras significativas", ou seja, letras que tenham algum tipo de ligação com os elementos do conjunto.

Exemplo 1.2.

1. O conjunto das letras da palavra 'Matemática': $L = \{m, a, t, e, i, c\}$. Aqui foi escolhida a letra "L" por lembrar a palavra "letras", mas M também teria sido uma boa escolha;

2. O conjunto das vogais do alfabeto português: $V = \{a, e, i, o, u\}$;

3. O conjunto dos meses do ano com 30 dias: $T = \{\text{Abril, Junho, Setembro, Novembro}\}$.

1.2 Relação de pertinência

Para indicar que um elemento x pertence ao conjunto A, escrevemos

$$x \in A,$$

e para indicar que um elemento y não pertence ao conjunto A, escrevemos

$$y \notin A.$$

Com o mesmo significado de $x \in A$, escreve-se $A \ni x$, que se lê: "A contém x". Também podemos escrever $A \not\ni x$ que se lê: "A não contém x".

Observação: Ao colocarmos um traço oblíquo sobre um símbolo produzimos um novo símbolo cujo significado é a negação do primeiro. É o que acontece com o símbolo $\neq$ (diferente de) conhecido de todos, e agora com os símbolos $\notin$ e $\not\ni$ (não pertence e não contém).

Exemplo 1.3. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, então

$$1 \in A,\ 2 \in A, \ \text{ e } 6 \notin A.$$

Quando dois ou mais elementos pertencem a um mesmo conjunto é bastante comum listá-los e usar apenas um símbolo de pertinência. No exemplo acima podemos escrever $1, 2, 3 \in A$ para dizer que os três elementos pertencem ao conjunto A, ou seja, $1 \in A, 2 \in A$ e $3 \in A$.

Quando dizemos que <u>x é um elemento particular do conjunto A</u>, queremos dizer que x é um elemento específico desse conjunto, que pode ser distinguido dos demais por sua natureza ou definição. Ao contrário, quando dizemos que <u>y um elemento arbitrário (ou genérico) de A</u>, significa que y é um elemento do qual nada se supõe, salvo sua pertinência ao conjunto A.

No exemplo acima, os números 2 e 4 são elementos particulares de A. Quando queremos nos referir a um elemento arbitrário desse conjunto A podemos dizer "seja x um elemento arbitrário de A ou "seja $x \in A$ um elemento qualquer".

1.3 Família de conjuntos

Um conjunto cujos elementos também são conjuntos é chamado de família de conjuntos. Por exemplo,

$$F = \Big\{\{2, 3\}, \{2\}, \{5, 6, 7\}\Big\}$$

é uma família de conjuntos, cujos elementos são $\{2, 3\}$, $\{2\}$, e $\{5, 6, 7\}$. Neste caso

$$\{2, 3\} \in F, \quad \{2\} \in F \ \text{ e } \ \{5, 6, 7\} \in F$$

Note que $2 \notin F$ e $5 \notin F$, pois os elementos de F não são números, são conjuntos!

Uma reta é um conjunto de pontos e, portanto, um conjunto de retas pode ser considerado uma família de conjuntos.

Também faz sentido considerar um conjunto no qual alguns elementos são conjuntos e outros não. Por exemplo: $F = \{\{2, 3\}, 2, \{5\}\}$ Aqui

$$\{2, 3\} \in F, \quad 3 \notin F, \quad 2 \in F, \quad \{2\} \notin F, \quad \{5\} \in F \ \text{ e } \ 5 \notin F$$

1.4 Conjunto universo

Chama-se conjunto universo (ou apenas universo de uma teoria) o conjunto de todos os elementos que são considerados no estudo de uma teoria.

Por exemplo, no estudo de Aritmética o universo geralmente é o conjunto dos números inteiros, e na Geometria o universo pode ser o conjunto de todos os pontos do plano ou do espaço.

O universo também é chamado de domínio e vamos representá-los pela letra $\mathcal{U}$.

1.5 Conjuntos numéricos

Os seguintes conjuntos numéricos são particularmente importantes na Matemática e serão extensivamente usados em nossos exemplos:

- Conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, formado pelos números $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$;
- Conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, constituído pelos números naturais, seus opostos e o zero, ou seja, $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$;
- Conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, formado os números que podem ser escritos como o quociente de dois números inteiros, ou seja, que podem ser escritos na forma p/q com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$;
- Conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, cujos elementos são todos os números racionais e irracionais (não racionais);
- Conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, cujos elementos são todos os números da forma $a+bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$.

1.6 Determinação de um conjunto

Basicamente, há duas maneiras de dar (ou definir) um conjunto num determinado universo $\mathcal{U}$. A primeira forma é simplesmente enumerar todos os elementos que pertencem ao conjunto. Por exemplo:

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

é o conjunto dos primeiros 13 números naturais. Neste caso dizemos que o conjunto está definido por enumeração ou extensão.

Num conjunto definido por enumeração, a ordem dos elementos é indiferente e cada elemento deve figurar somente uma vez. Por exemplo:

1. $Q = \{25, 4, 16, 1, 9\}$ e $Q = \{1, 4, 9, 16, 25\}$ representam o mesmo conjunto;
2. O conjunto $B = \{1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 2, 1\}$ apesar de apresentar um padrão esteticamente elegante, não atende as normas de representação por enumeração acima, desperdiçando espaço e tirando atenção do que realmente interessa, que é o fato do conjunto B possuir apenas 4 elementos, ou seja, $B = \{1, 2, 3, 4\}$

A segunda forma de definir um conjunto é muito mais eficiente e por isso, é a mais usada. Consiste em estabelecer um universo $\mathcal{U}$ e enunciar um critério de pertinência que é satisfeito por todos os elementos do conjunto e somente por esses elementos.

Este critério de pertinência consiste em uma ou mais condições que somente os elementos do conjunto devem satisfazer. Por exemplo, o conjunto D dos 10 primeiros números naturais acima, poderia ser dado da seguinte forma

$$D = \{n \in \mathbb{N}; 1 \leqslant n \leqslant 10\}.$$

Essa é a forma mais comum de definir um conjunto A em um universo $\mathcal{U}$: primeiro indicamos o universo no qual os elementos x serão tomados e a seguir a condição $p(x)$ que deve ser satisfeita. A notação correta é a seguinte:

$$A = \{x : x \in \mathcal{U} \text{ e } p(x)\} \quad \text{ou} \quad A = \{x \in \mathcal{U} : p(x)\}$$

Caso os elementos do conjunto A precisem verificar mais de uma condição, por exemplo, $p(x)$ e $q(x)$ simultaneamente, podemos escrever:

$$A = \{x \in \mathcal{U} : p(x) \text{ e } q(x)\}$$

Quando não há risco de ambiguidade, pode-se suprimir a indicação do universo $\mathcal{U}$ nas definições dos conjuntos escrevendo-se apenas:

$$A = \{x : p(x)\} \quad \text{ou} \quad A = \{x : p(x) \text{ e } q(x)\}$$

Exemplo 1.4.

1. $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 5\} = \{1, 2, 3, 4\}$;
2. $B = \{x \in \mathbb{N} : x < 20$ *e* x *é primo*$\}$;
3. $C = \{x \in \mathbb{Z} : x$ *é divisível por* $5\}$;

1.7 Conjunto unitário

Chama-se conjunto unitário todo o conjunto constituído de um único elemento. Quando $A = \{a\}$ dizemos que A é o conjunto unitário determinado pelo elemento a.

Importante: note que uma coisa é um conjunto unitário e outra coisa é o elemento que o determina. Dessa forma: $3 \in \{3\}$ é o correto e a notação $3 = \{3\}$ não faz sentido.

Exemplo 1.5.

1. $P = \{x \in \mathbb{N} : x + 1 = 3\} = \{2\}$;
2. $Q = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 0\} = \{0\}$;

1.8 Conjunto vazio

Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\}$. Note que não existe número real que satisfaça a condição $x^2 < 0$, logo essa é uma condição impossível.

O conjunto dos elementos que verificam uma condição impossível é um conjunto sem elementos, portanto convencionaremos chamá-lo de conjunto vazio. Trata-se de uma convenção Matemática que amplia o significado usual da palavra conjunto.

A notação usual para o conjunto vazio é $\varnothing$.

Exemplo 1.6. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\} = \varnothing$ e $R = \{x \in \mathbb{N} : x = x + 1\} = \varnothing$

1.9 Conjuntos finitos e infinitos

Uma correspondência entre os conjuntos A e B é unívoca de A para B se para cada elemento de A corresponder um único elemento de B. Dizemos que a correspondência é biunívoca, se ela for unívoca tanto de A para B como de B para A. Em outras palavras, uma correspondência é biunívoca se: para cada elemento de A corresponde um único elemento de B e, reciprocamente, para cada elemento de B corresponde um único elemento de A.

Dizemos que um conjunto A é finito quando, para algum $n \in \mathbb{N}$, existir uma correspondência biunívoca entre o conjunto A e o conjunto dos n primeiros números naturais.

Por exemplo, é fácil estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{Z}; |x| \leqslant 2\} \quad \text{e} \quad \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Para completar nossa definição, assumimos que o conjunto vazio é finito e possui zero elementos. Finalmente, diremos que um conjunto é infinito quando ele não for finito.

Usaremos a notação $n(A)$ para designar o número de elementos de um conjunto finito A. Note que:

- A vazio $\Rightarrow n(A) = 0$;
- A finito e não vazio $\Rightarrow n(A) = n \in \mathbb{N}$.

Para representar um conjunto finito, com um número não determinado de elementos, usamos três pontos ente vírgulas, por exemplo:

$$\{a, b, c, ..., m\}.$$

E para representar conjuntos infinitos, listamos uma quantidade representativa de seus elementos colocando de três pontos entre a última vírgula e a chave que delimita o conjunto, por exemplo:

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

No parágrafo acima o termo "quantidade representativa" deve ser entendido como "uma quantidade de elementos suficiente para caracterizar qual propriedade um elemento deve possuir para estar nesse conjunto".

Por exemplo: quando escrevemos $P = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ e $R = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$, presume-se que P seja formado pelo números naturais pares e que R seja o conjunto dos números primos.

Também é comum encontrar a notação $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ para indicar que o conjunto dos números inteiros tem uma infinidade de elementos "nas duas direções" (positiva e negativa).

Para indicar que um conjunto finito possui exatamente k elementos (sendo k um número natural qualquer) pode-se escrever

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}.$$

1.10 Notações especiais para alguns conjuntos numéricos

Excluindo o zero:

Os conjuntos numéricos $\mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*$ e $\mathbb{R}^*$ são obtidos a partir dos conjuntos numéricos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ excluindo-se o zero. Portanto:

$$\mathbb{Z}^* \doteq \{x \in \mathbb{Z} : x \neq 0\}, \qquad \mathbb{Q}^* \doteq \{x \in \mathbb{Q} : x \neq 0\} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^* \doteq \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}.$$

Não Negativos:

Os conjuntos numéricos $\mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}_+$ e $\mathbb{R}_+$ são obtidos a partir dos conjuntos numéricos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ considerando-se apenas os elementos não negativos (ou seja, maiores ou iguais a zero). Portanto:

$$\mathbb{Z}_+ \doteq \{x \in \mathbb{Z} : x \geqslant 0\}, \qquad \mathbb{Q}_+ \doteq \{x \in \mathbb{Q} : x \geqslant 0\} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}_+ \doteq \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}.$$

Não Positivos:

Os conjuntos numéricos $\mathbb{Z}_-, \mathbb{Q}_-$ e $\mathbb{R}_-$ são obtidos a partir dos conjuntos numéricos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ considerando-se apenas os elementos não positivos (ou seja, menores ou iguais a zero). Portanto:

$$\mathbb{Z}_- \doteq \{x \in \mathbb{Z} : x \leqslant 0\}, \qquad \mathbb{Q}_- \doteq \{x \in \mathbb{Q} : x \leqslant 0\} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}_- \doteq \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 0\}.$$

Combinando notações:

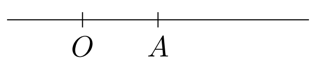
Também é comum considerar conjuntos numéricos não positivos, ou não negativos, sem o zero, para isso usaremos as notações:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_+^* &\doteq \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\} \doteq \mathbb{N}, & \mathbb{Q}_+^* &\doteq \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}, & \mathbb{R}_+^* &\doteq \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, \\ \mathbb{Z}_-^* &\doteq \{x \in \mathbb{Z} : x < 0\}, & \mathbb{Q}_-^* &\doteq \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}, & \mathbb{R}_-^* &\doteq \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}. \end{aligned}$$

Observação: Note que nos conjuntos acima foi usado o símbolo " $\doteq$ " em vez do símbolo de igualdade " $=$ " . Este é um símbolo de definição bastante comum em textos de Matemática. A expressão $A \doteq \{a, b, c\}$ significa que o autor passará a denominar por A o conjunto $\{a, b, c\}$. Alguns autores também usam o símbolo " $:=$ " com esse mesmo significado.

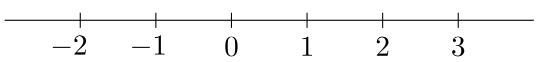
1.11 Representação geométrica dos números reais

Os números reais podem ser representados geometricamente pelos pontos de uma reta, chamada reta real. Escolhe-se um ponto O para representar o número real zero e um outro ponto A, à direita de O, para representar o número real 1.



Usando a distância entre O e A como unidade de medida, a todo ponto da reta real corresponderá um único número real e, inversamente, a todo número real corresponderá um único ponto dessa reta. Em outras palavras, há uma correspondência biunívoca entre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e o conjunto dos pontos da reta real.

Os números reais à direita do zero (que estão do mesmo lado que o 1) formam o conjunto $\mathbb{R}_+^*$ dos números reais positivos, já os números reais à esquerda do zero formam o conjunto $\mathbb{R}_-^*$ dos números reais negativos. O número 0 não é positivo nem negativo.



Observação: A demonstração que essa correspondência é biunívoca é um problema bem mais delicado e depende de vários resultados mais profundos. Tendo em vista o fato deste curso ser introdutório, vamos assumir esse resultado como verdadeiro.

1.12 Intervalos limitados em $\mathbb{R}$

Sejam a e b dois números reais, com $a < b$. Chamamos de intervalo fechado de extremos a e b o conjunto $[a, b]$ formado por todos os números reais x tais que $a \leqslant x \leqslant b$, ou seja,

$$[a, b] \doteq \{x \in \mathbb{R}; a \leqslant x \leqslant b\}$$

De forma análoga definimos os seguintes conjuntos:

- intervalo semi-aberto à direita de extremos a e b: $[a, b) \doteq \{x \in \mathbb{R}; a \leqslant x < b\}$
- intervalo semi-aberto à esquerda de extremos a e b: $(a, b] \doteq \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$
- intervalo aberto de extremos a e b: $(a, b) \doteq \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Em algumas situações particulares, pode ser interessante retirar a exigência $a < b$. Neste caso vamos nos deparar com algumas situações incomuns, por exemplo:

- No caso em que $b = a$, obtemos o intervalo fechado degenerado $[a, a] = \{a\}$. Essa situação ocorre em várias demonstrações da Análise Matemática na qual se usa o "Teorema dos Intervalos Encaixados".
- Também no caso em que $b = a$, teremos $(a, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a \text{ e } x > a\} = \varnothing$, $[a, a) = \varnothing$ e $(a, a] = \varnothing$.
- Para $b < a$, os intervalos limitados $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ e (a, b) serão todos vazios.

Para ajudar na compreensão desses exemplos abstratos, pense em alguns exemplos numéricos.

Para concluir, convém observar que todos os intervalos limitados, com $a < b$, são conjuntos infinitos, ou seja, cada um deles tem uma infinidade de elementos.

1.13 Intervalos não-limitados em $\mathbb{R}$

Seja a um números real qualquer. Chamamos de intervalo fechado ilimitado a direita de origem a o conjunto $[a, +\infty)$ formado por todos os números reais x tais que $x \geqslant a$, ou seja,

$$[a, +\infty) \doteq \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$$

De forma análoga definimos os seguintes conjuntos:

1. intervalo fechado ilimitado a esquerda de origem a: $(-\infty, a] \doteq \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$;
2. intervalo aberto ilimitado a direita de origem a: $(a, +\infty) \doteq \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$;
3. intervalo aberto ilimitado a esquerda de origem a: $(-\infty, a) \doteq \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$;
4. intervalo aberto ilimitado à esquerda e à direita: $(-\infty, +\infty) \doteq \mathbb{R}$.

1.14 Exercícios

1. Represente os conjuntos abaixo na forma tabular, ou seja, enumerando os elementos do conjunto:
   (a) letras da palavra "ARARA";
   (b) meses do ano que possuem a letra A em sua grafia;
   (c) divisores de 20
   (d) números primos maiores que 20 e menores que 50
   (e) números naturais menores que 50 que possuem exatamente 2 divisores;
   (f) números naturais menores que 50 que possuem exatamente 3 divisores;
   (g) números naturais menores que 50 que possuem pelo menos 8 divisores;

2. Dado $A = \{1, 4, 8, 9, 15, 16, 17\}$, represente os conjuntos abaixo na forma tabular:
   (a) $B_1 = \{a \in A; \sqrt{a} \in \mathbb{N}\}$;
   (b) $B_2 = \{a \in A; \sqrt{a} \in A\}$;
   (c) $B_3 = \{a \in A; |a - 5| < 7\}$;
   (d) $B_4 = \{a \in A; a^2 \leqslant 2a - 1\}$;
   (e) $B_5 = \{a \in A; (a - 1) \in A\}$;
   (f) $B_6 = \{a \in A; (a + 1) \in A\}$;

3. Represente os seguintes conjuntos com a notação de intervalo
   (a) $J_1 = \{x \in \mathbb{R}; -2 < x \leqslant -1\}$;
   (b) $J_2 = \{x \in \mathbb{R}; x + 1 > 0\}$;
   (c) $J_3 = \{x \in \mathbb{R}; |x - 5| < 2\}$;
   (d) $J_4 = \{x \in \mathbb{R}; x^2 = 2x + 3\}$;
   (e) $J_5 = \{x \in \mathbb{R}; |x - 1| > 1\}$;
   (f) $J_6 = \{x \in \mathbb{R}; |x| > 2 \text{ e } |x| \leqslant 5\}$;

Capítulo 2

Subconjuntos

2.1 Igualdade de conjuntos

Apesar de já termos usado o símbolo de igualdade previamente nesse texto e de todos nós termos uma ideia intuitiva do que devam ser conjuntos iguais, daremos uma definição precisa desse conceito e estudaremos suas propriedades com um pouco mais de cuidado.

Definição 2.1. *Dizemos que os conjuntos A e B são iguais, e denotamos $A = B$, quando esses conjuntos têm exatamente os mesmos elementos.*

A definição acima pode ser reescrita na linguagem de lógica matemática de seguinte forma:

$$A = B \iff (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \tag{2.1}$$

Quando o conjunto A não é igual ao conjunto B, dizemos que "A é diferente de B" e usamos a notação usual $A \neq B$. Neste caso existe pelo menos um elemento de A que não pertence a B, ou existe um elemento de B que não pertence a A.

Recordando que a bicondicional $p \leftrightarrow q$ é equivalente a proposição $(p \to q) \wedge (q \to p)$, a negação da bicondicional será:

$$\sim (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim (p \to q) \vee \sim (q \to q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

Usando essa expressão e o axioma da negação de quantificadores, obtemos

$$\begin{aligned} \sim \big[(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)\big] \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists x) \sim \big[(x \in A \Leftrightarrow x \in B)\big] \\ &\Leftrightarrow \quad (\exists x)\big[(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\big]. \end{aligned}$$

Logo podemos escrever

$$A \neq B \iff \big[(\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)\big] \vee \big[(\exists y)(y \in B \wedge y \notin A)\big] \tag{2.2}$$

Exemplo 2.2.

1. $\{a, b, c\} = \{b, c, a\} = \{a, a, b, b, b, c\}$
2. $\{x \in \mathbb{R}; |x| = 1\} = \{1, -1\}$
3. $\{\ |1|\ \} \neq \{1, -1\}$

2.1.1 Propriedades da igualdade

As seguintes propriedades a respeito da igualdade de conjuntos são válidas:

1. Reflexiva: $(\forall A)(A = A)$
   Dem.: Como $(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in A)$, então $A = A$.

2. Simétrica: $(\forall A, B)(A = B \Rightarrow B = A)$
   Dem.: $A = B \Rightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$. Pela comutatividade do bicondicional temos $(\forall x)(x \in B \Leftrightarrow x \in A) \Rightarrow B = A$

3. Transitiva: $(\forall A, B, C)(A = B \text{ e } B = C \Rightarrow A = C)$
   Dem.: $A = B$ e $B = C \Rightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ e $(\forall x)(x \in B \Leftrightarrow x \in C)$.
   Pela transitividade do bicondicional temos $(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in C) \Rightarrow A = C$.

2.2 Relação de inclusão

Definição 2.3. *Dizemos que um conjunto A está contido em um conjunto B se e somente se qualquer elemento de A também é um elemento de B.*

Usamos notação $A \subset B$ para indicar que A está contido em B. Simbolicamente

$$A \subset B \iff (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \tag{2.3}$$

Também é muito comum ler a expressão $A \subset B$ como "A é um subconjunto de B", o que pode ser mais enfático em algumas situações. Outra possibilidade é dizer que B contém A, neste caso usa-se a notação $B \supset A$. Existe ainda a expressão "B é superconjunto de A para indicar que $A \subset B$, apesar de ser raramente usada. Falaremos de subconjuntos com mais cuidado no próximo capítulo

A negação de $A \subset B$ é indicada pela notação $A \not\subset B$, que se lê: "A não está contido em B" ou "A não é subconjunto de B". Neste caso, existe pelo menos um elemento em A que não está em B. Simbolicamente:

$$A \not\subset B \iff (\exists x)(x \in A \text{ e } x \notin B) \tag{2.4}$$

Com o mesmo significado de $A \not\subset B$ escrevemos $A \not\supset B$, que se lê: "B não contém A".

Exemplo 2.4.

1. $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$;

2. $P = \{2, 4, 6, \ldots\} \subset \mathbb{N}$;

3. *As seguintes inclusões são válidas:* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. *Neste caso podemos escrever* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Importante: Para demonstrar uma inclusão do tipo $A \subset B$, devemos tomar um elemento genérico $x \in A$ e provar que x também pertence a B. Dessa forma ficará provado que qualquer elemento de A também é elemento de B, que é a definição de $A \subset B$.

Por exemplo, vamos demonstrar que $\mathbb{Z}^*_+ \subset \mathbb{Z}^*$. Com efeito,

$$x \in \mathbb{Z}^*_+ \implies x \in \mathbb{Z} \text{ e } x > 0 \implies x \in \mathbb{Z} \text{ e } x \neq 0 \implies x \in \mathbb{Z}^*.$$

Portanto, para todo x, se $x \in \mathbb{Z}_+^*$ então $x \in \mathbb{Z}^*$, isto é, $\mathbb{Z}_+^* \subset \mathbb{Z}^*$.

Na prova acima a primeira e a última implicações ($\Rightarrow$) poderiam ser substituídas por equivalências ($\Leftrightarrow$), pois essa é a definição desses conjuntos, apenas a segunda implicação não admite essa substituição. Mas levando em conta o que precisa ser demonstrado, as implicações são suficientes.

2.2.1 Propriedades da inclusão

As seguintes propriedades a respeito da inclusão de conjuntos são válidas:

1. Reflexiva: $(\forall A)(A \subset A)$

   Dem.: Como $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in A)$, então $A \subset A$.

2. Transitiva: $(\forall A, B, C)(A \subset B \text{ e } B \subset C \Rightarrow A \subset C)$

   Dem.: $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ e $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in C)$.
   Pela transitividade do bicondicional temos $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in C) \Rightarrow A \subset C$.

3. Antissimétrica: $(\forall A, B)(A \subset B \text{ e } B \subset A \Rightarrow A = B)$

   Dem.: Como $A \subset B$ e $B \subset A$, então $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$, e $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A)$. Como vale a implicação nas duas direções, isso é equivalente a dizer que $(\forall x)(x \in B \Leftrightarrow x \in A)$, ou seja, que $A = B$.

4. O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto, ou seja, $(\forall A)(\varnothing \subset A)$

   Dem.: Suponha, por absurdo, que exista um conjunto A tal que $\varnothing \not\subset A$. Isso significa que existe pelo menos um elemento x tal que $x \in \varnothing$ e $x \notin A$. O que leva a uma contradição, pois o conjunto vazio não possui elementos. Logo a proposição $(\exists A)(\varnothing \not\subset A)$ é falsa, consequentemente a proposição $(\forall A)(\varnothing \subset A)$ é verdadeira.

Observação: Observe que a recíproca de 3. é óbvia, ou seja, $A = B \Rightarrow A \subset B$ e $B \subset A$. Isso nos fornece um método eficiente para demonstrar da igualdade de dois conjuntos, denominado método da dupla inclusão, pois

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A.$$

Muito cuidado: Devemos prestar muita atenção ao uso correto dos símbolos de pertinência "$\in$" e de inclusão "$\subset$". A pertinência é uma relação entre 'elemento e conjunto' e a inclusão é uma relação entre conjuntos.

Exemplo 2.5. 1. $\{a\} \subset \{c, a, b\}$ e $a \in \{c, a, b\}$ são afirmações verdadeiras;

2. $\{a\} \in \{c, a, b\}$ e $a \subset \{c, a, b\}$ são afirmações <u>falsas</u>;

3. O correto é $\varnothing \subset \mathbb{N}$, enquanto que a proposição $\varnothing \in \mathbb{N}$ é claramente falsa;

4. Em um exemplo bem artificial, tomando $A = \{1, \{1\}, \{2\}, 3\}$, temos:

$$\begin{array}{llll} 1 \in A, & \{1\} \in A, & \{1\} \subset A, & \big\{\{1\}\big\} \subset A, \\ 2 \notin A, & \{2\} \in A, & \{2\} \not\subset A, & \big\{\{2\}\big\} \subset A, \\ 3 \in A, & \{3\} \notin A, & \{3\} \subset A, & \big\{\{3\}\big\} \not\subset A. \end{array}$$

   Analise cada uma das linhas da tabela acima com bastante cuidado, para certificar-se que não pairam dúvidas a respeito do uso correto desses símbolos.

2.3 Conjuntos comparáveis

Definição 2.6. *Dados dois conjuntos A e B arbitrários, diremos que A e B são comparáveis quando $A \subset B$ ou $B \subset A$, ou seja, dois conjuntos são comparáveis quando um deles está contido no outro.*

Portanto, A e B não são comparáveis se $A \not\subset B$ e $B \not\subset A$. Neste caso, A contém pelo menos um elemento que não pertence a B, e também B contém pelo menos um elemento que não pertence a A.

Exemplo 2.7.

1. Os conjuntos $\{a, b\}$ e $\{a, c, b\}$ são comparáveis, pois $\{a, b\} \subset \{a, c, b\}$;
2. Os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$ não são comparáveis, pois $1 \in A$ e $1 \notin B$ o que garante que $A \not\subset B$, enquanto que o fato de $3 \in B$ e $3 \notin A$ garante que $B \not\subset A$.
3. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ e o conjuntos dos números irracionais não são comparáveis.

2.4 Subconjuntos

Definição 2.8. *Diremos que A é subconjunto (ou parte) de B quando $A \subset B$.*

Note que, para qualquer conjunto B temos $B \subset B$ e $\varnothing \subset B$, logo esses conjuntos são chamados de subconjuntos triviais ou partes impróprias. No caso particular em que

$$A \subset B, \quad A \neq \varnothing \quad \text{e} \quad A \neq B$$

dizemos que A um é subconjunto próprio de B (ou que A é uma parte própria de B).

Obviamente, se A é subconjunto próprio de B, então: todo elemento de A é elemento de B e existe pelo menos um elemento de B que não pertence a A.

Exemplo 2.9.

1. O conjunto $A = \{1, 2\}$ é um subconjunto próprio de $B = \{1, 2, 3\}$.
2. Os conjunto $A = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é par }\}$ é um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$.

Observação: Vários matemáticos usam algumas variações da notação clássica. As mais comuns são $\subseteq$ e $\subsetneq$. O significado preciso dessas notações é o seguinte:

- $A \subsetneq B \iff A \subset B$ e $A \neq B$, ou seja, A é subconjunto próprio de B.
- $A \subseteq B \iff A \subset B$ ou $A = B$. Neste caso A é subconjunto de B, e a pessoa que escreveu quiz enfatizar que pode ocorrer a igualdade.

2.4.1 Subconjuntos de um conjunto finito

Seja B um conjunto finito com n elementos. Se $A \subset B$ então A é finito e possui no máximo n elementos.

Esse é um resultado da teoria de conjuntos, logo precisaria de uma demonstração. Entretanto vamos omití-la, pois está fora dos nossos objetivos nesse curso. Vamos admitir esse resultado como sendo verdadeiro e seguir adiante.

O objetivo nessa seção é encontrar todos os subconjuntos de um conjunto finito. Começaremos essa busca pelo conjunto vazio.

1. O conjunto vazio tem um único subconjunto: o próprio vazio.
2. Um conjunto unitário $A = \{a\}$ possui dois subconjuntos: $\varnothing$ e A.
3. Um conjunto com dois elementos $A = \{a, b\}$ possui quatro subconjuntos: $\varnothing, \{a\}, \{b\}, A$.
4. Ao analisar um conjunto com três ou mais elementos, precisamos tomar um pouco mais de cuidado. A dica é enumerar todos os subconjuntos com um número fixo de elementos e ir aumentando esse número, da seguinte forma.

   Se $A = \{a, b, c\}$ possui três elementos, então A contém:

   (a) um subconjunto com zero elementos: $\varnothing$
   (b) três subconjuntos com um elemento: $\{a\}, \{b\}$ e $\{c\}$
   (c) três subconjuntos com dois elementos: $\{a, b\}, \{a, c\}$ e $\{b, c\}$
   (d) um subconjunto com três elementos: $\{a, b, c\}$

5. A ideia usada no item anterior pode ser extrapolada para um conjunto com n elementos. O primeiro passo é recordar que a combinação

   $$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

   fornece exatamente o número de subconjuntos distintos de A com p elementos.

   Se $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ possui n elementos, então A contém:

   (a) $\binom{n}{0} = 1$ subconjunto com zero elementos: $\varnothing$
   (b) $\binom{n}{1} = n$ subconjuntos com um elemento: $\{a_1\}, \{a_2\} \ldots \{a_n\}$
   (c) $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ subconjuntos com dois elementos: $\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\} \ldots \{a_{n-1}, a_n\}$.
   $\vdots$
   (d) $\binom{n}{n} = 1$ subconjunto com n elementos: $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Teorema 2.10. *Todo conjunto finito com n elementos tem 2^n subconjuntos distintos.*

Dem.: Seguindo a notação do item 5. acima, notamos que o número de subconjuntos é

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

Nessa prova usamos o binômio de Newton $(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p}$, com $x = y = 1$. $\square$

Observação: O “quadradinho” $\square$ que usamos no final da demonstração acima serve apenas para avisar o leitor que “essa demonstração encerra-se aqui”.

Essa notação é especialmente útil em textos matemáticos longos, pois permite que o leitor “pule” uma demonstração e faça uma primeira leitura do texto sem entrar em detalhes técnicos de algumas demonstrações, que podem ser bastante extensas e desviar a atenção do leitor do objetivo final do texto.

Em vez de quadradinho aberto, como foi usado acima, alguns autores preferem usar retângulos ou quadradinhos pretos $\blacksquare$ ou ainda a abreviatura “CQD”, cujo significado é “conforme queríamos demonstrar”.

Em livros mais antigos, principalmente de geometria, pode se encontrar a abreviatura Q.E.D. para a frase latina *Quod Erat Demonstrandum*, cujo significado é "como se queria demonstrar".

2.5 Conjunto das partes

Definição 2.11. *Dado um conjunto E, o conjunto das partes de E é o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de E.*

O conjunto das partes de E será denotado $\mathcal{P}(E)$, assim:

$$\mathcal{P}(E) = \{A; A \subset E\}$$

Na prática, devemos ter em mente as seguintes relações:

- $A \subset E \iff A \in \mathcal{P}(E)$
- $b \in E \iff \{b\} \subset E \iff \{b\} \in \mathcal{P}(E)$

Note que:

1. $(\forall E)(\varnothing \in \mathcal{P}(E)$ e $E \in \mathcal{P}(E))$;
2. Se $E = \{a, b\}$ então $\mathcal{P}(E) = \big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, E\big\}$;
3. Se $E = \{a, b, c\}$ então $\mathcal{P}(E) = \Big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\Big\}$
4. Se $n(E) = k$ então $n(\mathcal{P}(E)) = 2^k$;

Teorema 2.12. *Sejam E e F dois conjuntos quaisquer, então:*

$$E \subset F \iff \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F).$$

Importante: Para demonstrar a equivalência enunciada no teorema acima, devemos provar duas implicações:

1. $E \subset F \Longrightarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.
2. $E \subset F \Longleftarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

Cada uma dessas implicações devem ser entendidas da seguinte forma:

1. Sabendo que $E \subset F$, mostre $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.
2. Sabendo que $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$, mostre que $E \subset F$.

Em Matemática, aquilo que já sabemos é chamado de "Hipótese", e o que queremos provar é chamado de "Tese".

Na primeira implicação acima temos:

Hipótese: $E \subset F$

Tese: $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

Note que: Para provar que $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$, devemos mostrar que todo elemento de $\mathcal{P}(E)$ está em $\mathcal{P}(F)$. Para isso basta tomar um elemento genérico $A \in \mathcal{P}(E)$ e mostrar que $A \in \mathcal{P}(F)$.

Mas se $A \in \mathcal{P}(E)$ então $A \subset E$. Como $E \subset F$, por hipótese, e a inclusão é transitiva então $A \subset F$ e portanto $A \in \mathcal{P}(F)$, o que conclui a prova da primeira implicação.

Todos os elementos da prova acima podem ser condensados em uma prova que usa apenas símbolos, da seguinte forma:

$$A \in \mathcal{P}(E) \Longrightarrow A \subset E \overset{E \subset F}{\Longrightarrow} A \subset F \Longrightarrow A \in \mathcal{P}(F).$$

Agora, em relação a segunda implicação, temos:

Hipótese: $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

Tese: $E \subset F$

Aqui a prova é mais direta. Note que precisamos mostrar apenas que $E \subset F$. Como $E \in \mathcal{P}(E)$ e $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ então $E \in \mathcal{P}(F)$, o que significa que $E \subset F$.

Limpando todos os comentários acima a respeito de como demonstrar um teorema que envolve uma equivalência, a demonstração final poderia ser assim.

Dem.(Teorema 2.12):
($\Rightarrow$) Se $A \in \mathcal{P}(E)$ então $A \subset E$. Como $E \subset F$ então $A \subset F$, ou seja, $A \in \mathcal{P}(F)$. Isso mostra que $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.
($\Leftarrow$) Como $E \in \mathcal{P}(E)$ e, por hipótese, $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$, então $E \in \mathcal{P}(F) \Rightarrow E \subset F$. $\square$

2.6 Complementar de um subconjunto

Definição 2.13. *Seja A um subconjunto de E ($A \subset E$). O complementar (ou complemento) de A em relação a E é o conjunto $\complement_E A$ de todos os elementos de E que não pertencem a A.*

Simbolicamente:

$$\complement_E A = \{x \in E; x \notin A\}$$

Exemplo 2.14. Considere os conjuntos: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ então

$$\complement_E A = \{1, 3, 5\}, \quad \complement_E B = \{4, 5, 6\} \quad \text{e} \quad \complement_{\mathbb{N}} E = \{n \in \mathbb{N}; n \geqslant 7\}.$$

e também temos

$$\complement_{\mathbb{R}}[1, +\infty) = (-\infty, 1) \quad \text{e} \quad \complement_{\mathbb{R}_+}[1, +\infty) = [0, 1).$$

2.6.1 Propriedades do complementar

Sejam A e B subconjuntos de E, então:

P_1. $\complement_E \varnothing = E$
De fato, $\complement_E \varnothing = \{x; x \in E \text{ e } x \notin \varnothing\} = \{x; x \in E\} = E$.

P_2. $\complement_E E = \varnothing$
De fato, $\complement_E E = \{x; x \in E \text{ e } x \notin E\} = \varnothing$.

P_3. $\complement_E(\complement_E A) = A$
De fato, $\complement_E(\complement_E A) = \{x; x \in E \text{ e } x \notin (\complement_E A)\} = \{x; x \in E \text{ e } x \in A\} = A$.

P_4. $A \subset B \Longleftrightarrow \complement_E A \supset \complement_E B$
($\Rightarrow$) Suponha que $A \subset B$, queremos provar que $\complement_E B \subset \complement_E A$.
$x \in \complement_E B \Rightarrow x \in E$ e $x \notin B \Rightarrow x \in E$ e $x \notin A \Rightarrow x \in \complement_E A$.
($\Leftarrow$) Suponha que $\complement_E B \subset \complement_E A$, queremos provar que $A \subset B$.
$x \in A \Rightarrow x \notin \complement_E A \Rightarrow x \notin \complement_E B \Rightarrow x \in B$.

Fixado um universo $\mathcal{U}$, podemos falar simplesmente no complementar de um conjunto A, ficando subentendido que se trata do complementar em relação a esse universo $\mathcal{U}$. Neste caso as notações usuais são A', A^c ou ainda $\complement A$.

$$A^c = \complement_{\mathcal{U}} A = \{x; x \notin A\}$$

Neste caso as propriedades acima podem ser reescritas como:

$$\varnothing^c = \mathcal{U}, \qquad \mathcal{U}^c = \varnothing, \qquad (A^c)^c = A$$

e

$$A \subset B \iff A^c \supset B^c.$$

Exemplo: Denotando por $P = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é par}\}$ e $I = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é ímpar}\}$ teremos

$$P^c = I, \qquad I^c = P, \qquad [0, +\infty)^c = (-\infty, 0).$$

2.7 Exercícios

1. Considere os conjuntos $A = \{1, \{1,2\}, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, \{1,2\}\}$. Classifique as proposições abaixo como verdadeiras ou falsas. Para as proposições falsas, justifique o motivo pelo qual são incorretas.

   (a) $1 \in A$
   (b) $\{1\} \in A$
   (c) $1 \subset A$
   (d) $\{1\} \subset A$
   (e) $2 \in A$
   (f) $3 \in A$
   (g) $\{1,2\} \in A$
   (h) $\{1,2\} \subset A$
   (i) $\{\{1,2\}\} \subset A$
   (j) $\{1,3\} \subset A$
   (k) $A \subset B$
   (l) $A = B$
   (m) $\{1,2\} \in B$
   (n) $\{1,2\} \subset B$
   (o) $1 \in B$

2. Encontre todos os subconjuntos dos conjuntos abaixo.

   (a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$
   (b) $B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$
   (c) $C = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
   (d) $D = \{A, \{B\}, C\}$

Capítulo 3

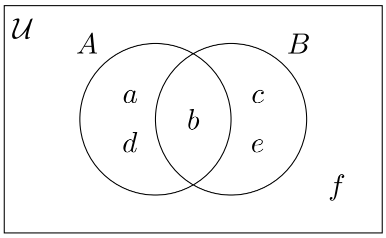
Operações com conjuntos

3.1 Diagramas de Venn

Para ilustrar definições, resultados e demonstrações da teoria de conjuntos, é muito comum usar uma representação gráfica por curvas fechadas simples, tais como círculos, ovais ou poligonais. Tal representação recebe o nome de diagrama de Venn.

Num diagrama de Venn, os elementos do conjunto são indicados por pontos internos a região delimitada por essas curvas e os elementos que não pertencem ao conjunto são representados por pontos externos a essa região, como no exemplo abaixo.

Exemplo 3.1. O diagrama de Venn abaixo auxilia na identificação de quais elementos estão em cada um dos conjuntos $A = \{a, b, d\}$ e $B = \{b, c, e\}$, enquanto que o elemento f não pertence a nenhum desses conjuntos.



O estilo usado no diagrama de Venn acima é o mais comum, o universo $\mathcal{U}$ foi representado por um retângulo e os demais conjuntos por círculos contidos nesse retângulo. Note que neste modelo de visualização nenhum elemento pode ser representado por pontos exatamente em cima de uma curva fechada que delimita uma região (nas fronteiras).

Importante: diagramas de Venn são uma excelente ferramenta para nos ajudar a visualizar um problema, principalmente para gerar exemplos e contra-exemplos. Entretanto argumentos e raciocínios baseados em diagramas de Venn não servem como demonstração da validade de uma proposição.

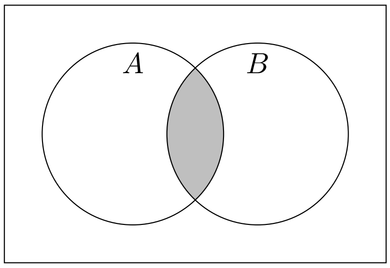
3.2 Interseção

Definição 3.2. *Chamaremos de interseção dos conjuntos A e B ao conjunto formado por todos os elementos que pertencem simultaneamente a A e a B.*

Esse conjunto é denotado $A \cap B$, que se lê: A interseção B ou, A inter B.

Simbolicamente, temos:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$



No diagrama de Venn acima, a região pintada contém os elementos que estão simultaneamente em A e B.

Nas demonstrações envolvendo interseção de conjuntos usaremos sempre a seguinte caracterização de seu elementos:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B.$$

Exemplo 3.3.

1. Para $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$ temos $A \cap B = \{1, 3\}$;
2. Considere $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$ e $D = \{2, 4\}$ então

   (a) $A \cap B = \varnothing$ (b) $A \cap C = \{1, 3\}$ (c) $B \cap C = D$ (d) $B \cap D = D$

3. $[0, 3) \cap (1, 5] = (1, 3)$, $[-1, 0] \cap [0, 1] = \{0\}$ e $[-1, 0) \cap [0, 1] = \varnothing$.
4. Se $P = \{2, 4, 6, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é par }\}$ e $B = \{3, 6, 9, 12, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é múltiplo de } 3\}$ teremos

   $$A \cap B = \{6, 12, 18, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é par e múltiplo de } 3\}.$$

5. Considerando retas como o conjunto de seus pontos, dadas duas retas r e s contidas em um mesmo plano α, três situações distintas podem ocorrer

   i. $r \cap s = \varnothing$ (r e s são retas paralelas)
   ii. $r \cap s = r$ (r e s são retas coincidentes)
   iii. $r \cap s = \{P\}$ (r e s se intersectam no ponto P)

   Note que, do ponto de vista da teoria dos conjuntos, é errado escrever $r \cap s = P$, pois a interseção de dois conjuntos é um novo conjunto, no caso *iii.* acima, $r \cap s$ é um conjunto unitário determinado pelo ponto P.

6. Seja $\mathcal{R}$ o conjunto dos retângulos, $\mathcal{L}$ o conjunto dos losangos e $\mathcal{Q}$ o conjunto dos quadrados da geometria euclidiana. Neste caso

   $$\mathcal{Q} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L},$$

   o que significa dizer que os quadrados são os retângulos que também são losangos.

Definição 3.4. *Dizemos que dois conjuntos são disjuntos quando não possuem elementos em comum, ou seja, A e B são disjuntos quando $A \cap B = \varnothing$.*

Exemplo 3.5.

1. Os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, -2, -3\}$ são claramente disjuntos.
2. O conjunto $\mathcal{R}$ dos triângulos retângulos e o conjunto $\mathcal{E}$ dos triângulos equiláteros são disjuntos, pois nenhum triângulo retângulo pode ter três lados com mesmo comprimento.

3.2.1 Teoremas relacionando inclusões e interseções

Teorema 3.6. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer, então $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$.*

Dem.: Para provar que $A \cap B \subset A$ devemos mostrar que qualquer elemento do conjunto $A \cap B$ também está em A, o que segue diretamente da definição. Simbolicamente podemos usar a lei da simplificação da lógica e escrever assim:

"Seja $x \in A \cap B$ um elemento qualquer então

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Como a prova acima vale para qualquer $x \in A \cap B$, segue que $A \cap B \subset A$".

A prova da segunda inclusão enunciada fica como exercício. □

Teorema 3.7. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer, então $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = B$*

Dem.: Vamos dividir a demonstração em duas partes. Ida($\Rightarrow$) e volta ($\Leftarrow$).

($\Rightarrow$) Sabendo que $A \subset B$, queremos provar que $A \cap B = A$. Pelo teorema acima já sabemos que $A \cap B \subset A$ logo, para termos a igualdade, só precisamos mostrar que $A \cap B \supset A$.
Seja $x \in A$, como $A \subset B$ então $x \in A$ e $x \in B$, ou seja, $x \in A \cap B$. Como x é um elemento qualquer de A, mostramos que qualquer elemento de A está em $A \cap B$, logo, $A \cap B \supset A$.

($\Leftarrow$) Sabendo que $A \cap B = A$, queremos provar que $A \subset B$. Mas, por hipótese, $A = A \cap B$ e, pelo item 1 acima, $A \cap B \subset B$, logo $A \subset B$. O que conclui a prova do teorema. □

Teorema 3.8. *Sejam A, B e X conjuntos quaisquer. Então $X \subset A$ e $X \subset B \Leftrightarrow X \subset A \cap B$.*

Dem.: Também dividiremos essa demonstração em duas partes. Ida($\Rightarrow$) e volta ($\Leftarrow$). Mas em vez de falar

($\Rightarrow$) Suponha que $X \subset A$ e $X \subset B$, e vamos provar que $X \subset A \cap B$.

Seja $x \in X$ um elemento qualquer, como $X \subset A$ e $X \subset B$ então $x \in A$ e $x \in B$, ou seja, $x \in A \cap B$. Mostramos assim que qualquer elemento de X está em $A \cap B$, ou seja, $X \subset A \cap B$.

($\Leftarrow$) Suponha agora que $X \subset A \cap B$. Mas $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$, pelo teorema 3.6, logo $X \subset A$ e $X \subset B$. □

Teorema 3.9. *Sejam A, B e X conjuntos quaisquer. Se $A \subset B$ então $X \cap A \subset X \cap B$.*

Dem.: Sabemos que $A \subset B$, e queremos provar que $X \cap A \subset X \cap B$. Para isso começamos tomando um $x \in X \cap A$ qualquer teremos

$$x \in X \cap A \Rightarrow x \in X \text{ e } x \in A \stackrel{A \subset B}{\Longrightarrow} x \in X \text{ e } x \in B \Rightarrow x \in X \cap B.$$

Como x acima foi escolhido arbitrariamente, segue que todo elemento de $X \cap A$ está em $X \cap B$, ou seja $X \cap A \subset X \cap B$. □

3.2.2 Propriedades da interseção

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer em um universo $\mathcal{U}$.

P_1. $A \cap \varnothing = \varnothing$; *[todo conjunto é disjunto do vazio]*

De fato, como $\varnothing \subset A$, pelo teorema 3.7 temos $A \cap \varnothing = \varnothing$.

P_2. $A \cap \mathcal{U} = A$; *[elemento neutro]*

Com efeito, como $A \subset \mathcal{U}$, pelo teorema 3.7 temos $A \cap \mathcal{U} = A$.

P_3. $A \cap A^c = \varnothing$; *[todo conjunto é disjunto de seu complementar]*

Basta observar que $A \cap A^c = \{x; x \in A \text{ e } x \in A^C\} = \{x; x \in A \text{ e } x \notin A\} = \varnothing$.

P_4. $A \cap A = A$; *[idempotência]*

Mais uma vez, como $A \subset A$, pelo teorema 3.7 temos $A \cap A = A$.

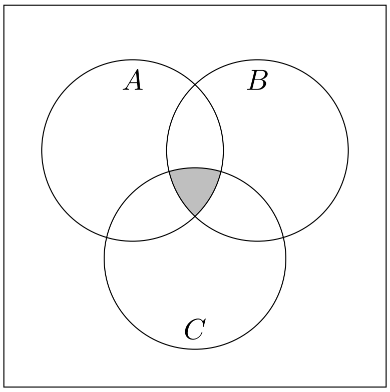
P_5. $A \cap B = B \cap A$; *[comutatividade]*

Com efeito, $A \cap B = \{x; x \in A \text{ e } x \in B\} = \{x; x \in B \text{ e } x \in A\} = B \cap A$

P_6. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; *[associatividade]*

Com efeito, $x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \text{ e } x \in C \Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \in B) \text{ e } x \in C$
$\Leftrightarrow x \in A \text{ e } (x \in B \text{ e } x \in C) \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$.

Observação: A interseção é uma propriedade binária (transforma dois conjuntos em um terceiro conjunto). A associatividade garante que as duas formas de colocar os parênteses na expressão $A \cap B \cap C$ para efetuar essas operações binárias conduzem ao mesmo resultado. Por este motivo podemos indicar o conjunto $(A \cap B) \cap C$ ou $A \cap (B \cap C)$ simplesmente por $A \cap B \cap C$, sem perigo de confusão.



3.2.3 Interseção de vários conjuntos

A noção de interseção, definida acima para dois conjuntos, pode ser estendida de maneira natural para qualquer número finito n de conjuntos, $n > 2$.

Definição 3.10. *A interseção dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é o conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a todos esses n conjuntos. Neste caso usamos as notações*

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \quad \textit{ou} \quad \bigcap_{j=1}^{n} A_j$$

Dessa forma

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = \{x; x \in A_1 \text{ e } x \in A_2 \text{ e } \ldots x \in A_n\},$$

ou ainda

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = \Big\{x; \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}\ x \in A_j\ \Big\}.$$

E teremos

$$x \in \bigcap_{j=1}^{n} A_j \Leftrightarrow \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}\ x \in A_j.$$

Exemplo 3.11.

1. Se $A_1 = [0, 1]$, $A_2 = [0, 2]$, $A_3 = [0, 3]$, $\ldots$, $A_n = [0, n]$. Então
$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = [0, 1]$$

2. Se $A_1 = [1, +\infty)$, $A_2 = [2, +\infty)$, $A_3 = [3, +\infty)$, $\ldots$, $A_n = [n, +\infty)$. Então
$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = [n, +\infty)$$

3. Considere os conjuntos
$$\begin{aligned} A_3 &= \{3, 6, 9, \ldots\} = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é multiplo de } 3\}; \\ A_4 &= \{4, 8, 12, \ldots\} = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é multiplo de } 4\}, \\ A_5 &= \{5, 10, 15, \ldots\} = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é multiplo de } 5\}, \end{aligned}$$
então $n \in (A_3 \cap A_4 \cap A_5)$ se, e somente se, n é múltiplo de 3, 4 e 5 simultaneamente, ou seja, se n é múltiplo de $3 \times 4 \times 5 = 60$, logo
$$\bigcap_{j=3}^{5} A_j = \{60, 120, 180, 240, \ldots\}$$

3.3 Reunião

Definição 3.12. *Chamaremos de reunião (ou união) dos conjuntos A e B ao conjunto formado por todos os elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B.*

Esse conjunto é denotado $A \cup B$, que se lê: "A reunião B" ou "A união B". Logo

$$A \cup B = \{x; x \in A \textit{ ou } x \in B\}.$$

Nas demonstrações envolvendo reunião de conjuntos usaremos sempre a seguinte caracterização de seu elementos:

$$x \in A \cup B \ \Leftrightarrow \ x \in A \ \text{ ou } \ x \in B.$$

Exemplo 3.13.

1. Para $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$ temos $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$;

2. Considere $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $D = \{4, 6\}$ então

   (a) $A \cup B = C$ (b) $A \cup C = C$ (c) $B \cup D = \{2, 4, 6\}$

3. $[0, 2) \cup (1, 4] = [0, 4]$, $(-\infty, 0] \cup [0, +\infty) = \mathbb{R}$, e $\mathbb{N} \cup \{-n; n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}$.

4. Se $A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ e $B = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$ teremos

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots\} = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é múltiplo de 2 ou de 3}\}.$$

Observação: Nos teoremas abaixo não especificamos quem são os conjuntos A, B e X. Sempre que isso ocorrer, deve-se entender que o autor não está impondo nenhuma restrição adicional aos objetos que estão sendo estudados.

Teorema 3.14. $A \subset A \cup B$ *e* $B \subset A \cup B$.

Dem.: Seja $x \in A$ um elemento qualquer então pela lei da adição da lógica

$$x \in A \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \Rightarrow x \in A \cup B.$$

Como as implicações acima valem para qualquer $x \in A$, segue que $A \subset A \cup B$. A prova da segunda inclusão enunciada fica como exercício. $\square$

Teorema 3.15. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Dem.: $(\Rightarrow)$ Sabendo que $A \subset B$, queremos provar que $A \cup B = B$. Pelo teorema anterior sabemos que $B \subset A \cup B$ logo, para termos a igualdade, só precisamos mostrar que $B \supset A \cup B$. Como $A \subset B$, se $x \in A$ então $x \in B$. Logo valem as implicações

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \Rightarrow x \in B \text{ ou } x \in B \Rightarrow x \in B.$$

Como x é um elemento qualquer de $A \cup B$, mostramos que qualquer elemento de $A \cup B$ está em B, ou seja, $A \cup B \subset B$.

$(\Leftarrow)$ Sabendo que $A \cup B = B$, queremos provar que $A \subset B$. Como $A \subset A \cup B$ e $A \cup B = B$ então $A \subset B$. O que conclui a prova do teorema. $\square$

Teorema 3.16. $A \subset X$ *e* $B \subset X \Leftrightarrow A \cup B \subset X$.

Dem.: $(\Rightarrow)$ Seja $x \in A \cup B$ um elemento qualquer, então $x \in A$ ou $x \in B$. Como $A \subset X$ e $B \subset X$ então $x \in X$, ou seja, qualquer elemento de $A \cup B$ está em X, e portanto $A \cup B \subset X$.

$(\Leftarrow)$ Suponha agora que $A \cup B \subset X$. Segue do teorema 3.15 que $A \subset A \cup B = X$ e $B \subset A \cup B = X$, o que conclui a prova. $\square$

Teorema 3.17. *Se* $A \subset B$ *então* $A \cup X \subset B \cup X$.

Dem.: Seja $x \in A \cup X$ um elemento qualquer, então

$$x \in A \cup X \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in X \overset{A \subset B}{\Longrightarrow} x \in B \text{ ou } x \in X \Rightarrow x \in X \cup B.$$

Como x acima foi escolhido arbitrariamente, segue que $A \cup X \subset B \cup X$. $\square$

3.3.1 Propriedades da reunião

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer em um universo $\mathcal{U}$.

P_1. $A \cup \varnothing = A$; *[elemento neutro]*

De fato, por 3.14 temos $A \subset A \cup \varnothing$. Por outro lado, se $x \in A \cup \varnothing \Rightarrow x \in A$ ou $x \in \varnothing$, como não existem elementos no vazio então $x \in A$ e portanto $A \cup \varnothing \subset A$. Como valem as duas inclusões, segue que $A \cup \varnothing = A$.

P_2. $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$;

Com efeito, como $A \subset \mathcal{U} \;\Rightarrow\; A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

P_3. $A \cup A^c = \mathcal{U}$;

Basta observar que $A \cup A^c = \{x; x \in A \text{ ou } x \in A^C\} = \{x; x \in A \text{ ou } x \notin A\} = \mathcal{U}$.

P_4. $A \cup A = A$; *[idempotência]*

Como $A \subset A$, pelo teorema 3.15 temos $A \cup A = A$.

P_5. $A \cup B = B \cup A$; *[comutatividade]*

Com efeito, $A \cup B = \{x; x \in A \text{ ou } x \in B\} = \{x; x \in B \text{ ou } x \in A\} = B \cup A$

P_6. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; *[associatividade]*

Com efeito, $x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \text{ ou } x \in C \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ ou } x \in C$
$\Leftrightarrow x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ ou } x \in C) \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$.

3.3.2 Teoremas relacionando interseção e reunião de conjuntos

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer em um universo $\mathcal{U}$.

Teorema 3.18. *$A \cap (A \cup B) = A$ e $A \cup (A \cap B) = A$.*

Dem.: Como $A \subset A \cup B$, segue do teorema 3.15 que $A \cap (A \cup B) = A$. Analogamente, de $A \cap B \subset A$ temos $A \cup (A \cap B) = A$. □

As duas identidades acima são conhecidas como "leis de absorção", pois no lado direito das igualdades o termo B desaparece (é absorvido).

Observação: Na prova acima usamos o termo "analogamente" para enfatizar que os argumentos usados na prova da segunda identidade eram análogos. É muito comum o autor dizer apenas que "a prova da segunda identidade é análoga", deixando para o leitor a obrigação de verificar que os argumentos usados são muito parecidos.

A seguir provaremos a distributividade da interseção em relação a reunião e da reunião em relação a interseção.

Teorema 3.19.

1. *$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e*
2. *$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.*

Dem.: A demonstração dessas propriedades usa apenas as leis distributivas da lógica. Faremos uma delas e deixaremos a outra como exercício.

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B \cup C \;\Leftrightarrow\; x \in A \text{ e } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ e } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \text{ ou } (x \in A \cap C) \;\Leftrightarrow\; x \in A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

□

O último teorema dessa subseção é conhecido como "Leis de De Morgan" que afirmam: O complementar da interseção é a reunião dos complementares; e o complementar da reunião é a interseção dos complementares.

Teorema 3.20. *[Leis de De Morgan]*

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ *e*

2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Dem.: Aqui também a demonstração consiste em aplicar as leis de De Morgan da lógica. Como no teorema anterior, faremos uma delas e deixaremos a outra como exercício.

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow \sim \big(x \in A \cap B\big) \Leftrightarrow \sim \big(x \in A \text{ e } x \in B\big) \\ &\Leftrightarrow \sim (x \in A) \text{ ou } \sim (x \in B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \text{ ou } x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c \end{aligned}$$

□

3.3.3 Reunião de vários conjuntos

A noção de reunião de dois conjuntos também pode ser estendida de maneira natural para qualquer número finito n de conjuntos, $n > 2$, como fizemos com a interseção.

Definição 3.21. *A reunião dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um desses n conjuntos. Neste caso usamos as notações*

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \quad \textit{ou} \quad \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

Dessa forma

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \{x; x \in A_1 \text{ ou } x \in A_2 \text{ ou } \ldots x \in A_n\},$$

ou ainda

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \Big\{x; \exists j \in \{1, 2, \ldots, n\} \ x \in A_j \ \Big\}.$$

E teremos

$$x \in \bigcup_{j=1}^{n} A_j \Leftrightarrow \exists j \in \{1, 2, \ldots, n\} \ x \in A_j.$$

Exemplo 3.22.

1. Se $A_1 = [0, 1]$, $A_2 = [0, 2]$, $A_3 = [0, 3]$, $\ldots$, $A_n = [0, n]$. Então

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = [0, n]$$

2. Se $A_1 = [1, +\infty)$, $A_2 = [2, +\infty)$, $A_3 = [3, +\infty)$, $\ldots$, $A_n = [n, +\infty)$. Então

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = A_1$$

3.3.4 Álgebra de conjuntos

As propriedades das operações de reunião, interseção e complementação, juntamente com as relações de igualdade e inclusão conjuntos, introduz uma estrutura algébrica na teoria de conjuntos chamada Algebra dos Conjuntos.

A álgebra de conjuntos possui uma analogia muito forte com a álgebra de números usual (aritmética).

- Na aritmética a adição e a multiplicação são operações associativas e comutativas; na álgebra de conjuntos a reunião e intersecção de conjuntos também gozam dessas propriedades.
- Na aritmética temos a relação "menor ou igual" que é reflexiva, anti-simétrica e transitiva; e o mesmo vale para a relação de inclusão de conjuntos.

Obviamente também existem grandes diferenças, por exemplo, dois conjuntos A e B nem sempre são comparáveis, enquanto que dois números (reais) serão sempre comparáveis, ou seja, dados $a, b \in \mathbb{R}$ teremos $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$.

Essa estrutura algébrica nos leva naturalmente a pensar em expressões algébricas e simplificação de expressões, as quais nos ajudam na compreensão dos conjuntos que estamos estudando. A ideia é usar todas as propriedades que provamos envolvendo reunião, interseção e complementação para obter expressões mais simples.

Exemplo 3.23.

1. $A \cap (B \cap A^c) = \varnothing$, pois
   $A \cap (B \cap A^c) = A \cap (A^c \cap B) = (A \cap A^c) \cap B = \varnothing \cap B = \varnothing$.
2. $A \cup (A^c \cup \varnothing) = A \cup A^c = \mathcal{U}$.
3. $(A \cup B) \cap B^c = A \cup B^c$, pois
   $(A \cup B) \cap B^c = (A \cup B^c) \cup (B \cap B^c) = (A \cup B^c) \cup \varnothing = A \cup B^c$.
4. $(A \cup B)^c \cup (A^c \cap B) = A^c$, pois
   $(A \cup B)^c \cup (A^c \cap B) = (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = A^c \cap (B^c \cup B) = A^c \cap \mathcal{U} = A^c$.

3.4 Diferença de dois conjuntos

Definição 3.24. *A diferença entre dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos de A que não pertencem a B.*

Esse conjunto é denotado $A - B$ ou $A \setminus B$, que se lê: "A menos B" ou "diferença entre A e B". Assim

$$A - B = \{x; x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Nas demonstrações envolvendo diferença de conjuntos usaremos sempre a caracterização:

$$x \in A - B \ \Leftrightarrow\ x \in A \ \text{ e } \ x \notin B.$$

Observação:

- Note que $x \in A - B \Rightarrow x \in A$ e $x \notin B \Rightarrow x \in A$, ou seja, $A - B \subset A$.
- No caso particular em que $B \subset A$, temos $A - B = \{x; x \in A \text{ e } x \notin B\} = \complement_A B$, isto é,

$$B \subset A \Rightarrow \complement_A B = A - B$$

- se A e B são subconjuntos quaisquer de um mesmo conjunto E, então

$$A - B = \{x \in E; x \in A \text{ e } x \notin B\} = \{x \in E; x \in A \text{ e } x \in \complement_E B\} = A \cap \complement_E B.$$

Em particular, se $E = \mathcal{U}$ temos $A - B = A \cap B^c$.

Exemplo 3.25.

1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{2, 4\}$ e $D = \{3, 4\}$. Então
   $A - B = C$, $A - C = B$, $A - D = \{1, 2\}$, $B - C = B$,
   $B - A = \varnothing$, $C - A = \varnothing$, $B - D = \{1\}$, $C - D = \{2\}$.

   Note que $A - B \neq B - A$, logo a diferença de conjuntos não e comutativa.

2. $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = \mathbb{R} - (-\infty, 0)$ e $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R} - [0, +\infty)$.

3.4.1 Propriedades da diferença

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer em um universo $\mathcal{U}$.

P_1. $A - \varnothing = A$.

Basta observar que $\forall x$, $x \in (A - \varnothing) \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin \varnothing \Leftrightarrow x \in A$.

P_2. $\mathcal{U} - A = A^c$.

Observe que, $x \in (\mathcal{U} - A) \Leftrightarrow x \in \mathcal{U}$ e $x \notin A \Leftrightarrow x \in \mathcal{U}$ e $x \in A^c \Leftrightarrow x \in A^c$..

P_3. $A - A = \varnothing$.

Com efeito, $x \in (A - A) \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin A$. Como não existe x que satisfaça essas duas condições simultaneamente, então $A - A = \varnothing$.

P_4. $A - A^c = A$.

Note que $x \in A - A^c \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin A^c \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in A \Leftrightarrow x \in A$.

P_5. $(A - B)^c = A^c - B$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}
x \in (A - B)^c &\Leftrightarrow x \notin A - B \Leftrightarrow \sim (x \in A - B) \Leftrightarrow \sim (x \in A \text{ e } x \notin B) \\
&\Leftrightarrow \sim (x \in A) \text{ ou } \sim (x \notin B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \in B \\
&\Leftrightarrow x \in A^c \text{ ou } x \in B \Leftrightarrow x \in A^c \cup B.
\end{aligned}$$

P_6. $A - B = B^c - A^c$.

Pois, $x \in B^c - A^c \Leftrightarrow x \in B^c$ e $x \notin A^c \Leftrightarrow x \notin B$ e $x \in A \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin B \Leftrightarrow x \in A - B$.

P_7. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.

De fato,

$$\begin{aligned}
x \in (A - B) - C &\Leftrightarrow x \in A - B \text{ e } x \notin C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \notin B) \text{ e } x \notin C \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ e } (x \notin B \text{ e } x \notin C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ e } (\sim (x \in B) \text{ e } \sim (x \in C)) \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ e } \sim (x \in B \text{ ou } x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ e } \sim (x \in B \cup C) \\
&\Leftrightarrow x \in A - (B \cup C).
\end{aligned}$$

P_8. $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$.

Note que,

$$\begin{aligned} x\in(A-B)\cup(A\cap C) &\Leftrightarrow x\in A-B \text{ ou } x\in A\cap C\\ &\Leftrightarrow (x\in A \text{ e } x\notin B) \text{ ou } (x\in A \text{ e } x\in C)\\ &\Leftrightarrow x\in A \text{ e } (x\notin B \text{ ou } x\in C)\\ &\Leftrightarrow x\in A \text{ e } \sim(x\in B \text{ e } x\notin C)\\ &\Leftrightarrow x\in A \text{ e } \sim(x\in B\cap C)\\ &\Leftrightarrow x\in A \text{ e } x\notin B\cap C\\ &\Leftrightarrow x\in A-(B\cap C). \end{aligned}$$

P_9. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(C-A)$ e

$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$.

P_{10}. $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ e

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

P_{11}. $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$ e

$(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$.

P_{12}. $A-(A-B)=A\cap B$ e

$(A-B)-B=A-B$.

3.5 Diferença simétrica

Definição 3.26. *A diferença simétrica de dois conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a um e somente a um dos conjuntos A e B.*

Esse conjunto é denotado $A\triangle B$, que se lê: "diferença simétrica de A e B". Assim

$$A\triangle B=\{x;(x\in A \ e\ x\notin B) \ ou\ (x\in B \ e\ x\notin A)\}.$$

Note que

$$x\in A\triangle B \Leftrightarrow (x\in A \text{ e } x\notin B) \text{ ou } (x\in B \text{ e } x\notin A)\Leftrightarrow x\in(A-B)\cup(B-A),$$

ou seja,

$$A\triangle B=(A-B)\cup(B-A).$$

Também é fácil ver que a diferença simétrica dos conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que estão na reunião de A e B e não estão na interseção de A e B, ou seja,

$$A\triangle B=(A\cup B)-(B\cap A).$$

A diferença simétrica raramente aparece em textos matemáticos, na verdade não lembro de nenhum grande resultado da matemática que dependa desse conceito. Apesar disso é um assunto que relaciona os conceitos de reunião, interseção e diferença de conjuntos, logo vale a menção e uma lista de propriedades relacionadas abaixo que ficam com exercício para o leitor.

P_1. $A \triangle B = B \triangle A$;

P_2. $(A \triangle B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$;

P_3. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$;

P_4. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$;

P_5. $A \cup (B \triangle C) = (A \cup B \cup C) - (A^c \cap B^c \cap C^c)$;

3.6 Reuniões e interseções arbitrárias

As leis associativas nos permitem falar em uniões e interseções de uma quantidade finita de conjuntos conforme vimos acima.

Porém, na matemática, muitas vezes precisamos considerar uniões e interseções de coleções infinitas de conjuntos. Neste caso, precisamos voltar às ideias originais de união e intersecção para formular uma definição alternativa que não dependa da quantidade de conjuntos que estamos trabalhando.

Há duas notações distintas que são comumente usados, dependendo do contexto. Suponha primeiramente que para cada elemento i de algum conjunto I corresponde um conjunto A_i. Vamos nos referir à coleção

$$\{A_i; i \in I\}$$

como uma família indexada de conjuntos, sendo I o conjunto de índices dessa família.

Exemplo 3.27. Para cada $j \in \mathbb{N}$ considere o intervalo fechado $A_j = [0, j]$. A coleção de todos esses intervalos pode ser denotada por

$$\mathcal{A} = \{A_j; j \in \mathbb{N}\}$$

é uma família indexada de conjuntos cujo conjunto de índices é $\mathbb{N}$.

Exemplo 3.28. Para cada numero racional a considere o conjunto $R_a = \{x \in \mathbb{Q}; x < a\}$. Neste caso a família indexada de conjuntos é

$$\mathcal{R} = \{R_a; a \in \mathbb{R}\}$$

e o conjunto de índices é $\mathbb{Q}$.

Observação: A família $\mathcal{R}$ acima é particularmente importante em análise matemática. Seus elementos são chamados de cortes racionais e aparecem na construção dos números reais pelo método dos cortes de Dedekind.

Definição 3.29. *A união de uma família indexada $\{A_i : i \in I\}$ é o conjunto $\bigcup_{i\in I} A_i$ formado por todos os elementos que se encontram em um ou mais dos conjuntos A_i da família, ou seja*

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x; (\exists i \in I)\ x \in A_i\}$$

dessa forma

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I,\ x \in A_i.$$

Definição 3.30. *A interseção de uma família indexada $\{A_i : i \in I\}$ é o conjunto $\bigcap_{i\in I} A_i$ formado por todos os elementos que se encontram em todos os conjuntos A_i da família, ou seja*

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x; (\forall i \in I)\ x \in A_i\}$$

dessa forma

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I,\ x \in A_i.$$

Observe que o caso em que o conjunto de índices I consiste de apenas dois elementos, digamos $I = \{1, 2\}$ então

$$\bigcup_{i\in I} A_i = A_1 \cup A_2 \quad \text{e} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = A_1 \cap A_2.$$

assim as noções de união e intersecção arbitrária de famílias indexadas são generalizações das noções de união e intersecção de pares de conjuntos e, portanto, também de reuniões e interseções finitas de conjuntos.

O próximo teorema, apesar de simples, ilustra muito bem o papel que essas definições arbitrárias de reunião e interseção desempenham na teoria e a forma correta de manipulá-las.

Teorema 3.31. *Seja $\{A_i : i \in I\}$ uma família indexada de conjuntos. Então para qualquer $i_o \in I$ temos*

$$A_{i_o} \subset \bigcup_{i\in I} A_i \quad e \quad \bigcap_{i\in I} A_i \subset A_{i_o}.$$

Dem.: Seja $x \in A_{i_o}$ um elemento qualquer, logo $\exists i \in I$ tal que $x \in A_i$ (neste caso i é o próprio i_o). Assim, por definição, $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Isso prova que $A_{i_o} \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.

Para provar que $\bigcap_{i\in I} A_i \subset A_{i_o}$, seja $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ um elemento qualquer. Pela definição de interseção de família indexada de conjuntos sabemos que $\forall i \in I,\ x \in A_i$. Como $i_o \in I$, então $x \in A_{i_o}$, o que conclui a prova do teorema. □

Observe que nas demonstrações acima não foi mencionado nem uma vez se o conjunto de índices era finito ou infinito. Também não foi feito qualquer menção se determinado conjunto A_i seria o primeiro ou o segundo ou ainda que exista uma ordem qualquer estabelecida entre eles.

De fato, o conjunto de índices não precisa ter nenhuma ordem particular (por exemplo: do menor para o maior), portanto não precisa haver uma maneira natural indexar uma família de conjuntos. As demonstrações dependem exclusivamente das definições de união e intersecção em termos de quantificadores sobre o conjunto de índices. Esse mesmo tipo de raciocínio será usado nos próximos teoremas.

Teorema 3.32. *Seja $\{A_i : i \in I\}$ uma família indexada de conjuntos qualquer e B um conjunto arbitrário, então:*

a. $B \cup \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(B \cup A_i)$;

b. $B \cap \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(B \cap A_i)$;

Dem.: Faremos apenas a prova do item $a.$, o item $b.$ fica para o leitor.

$$\begin{aligned} x \in B \cup \bigcup_{i\in I} A_i \quad &\Leftrightarrow \quad x \in B \text{ ou } x \in \bigcup_{i\in I} A_i \quad \Leftrightarrow \quad x \in B \text{ ou } \Big(\exists i \in I,\ x \in A_i\Big) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists i \in I,\ \Big(x \in B \text{ ou } x \in A_i\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \exists i \in I,\ \Big(x \in B \cup A_i\Big) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{i\in I}(B \cup A_i) \end{aligned}$$

□

Teorema 3.33 (Leis Distributivas). *Seja $\{A_i : i \in I\}$ uma família indexada de conjuntos qualquer e B um conjunto arbitrário, então:*

a. $B \cap \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i)$;

b. $B \cup \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i)$;

Dem.: Como no teorema anterior, faremos apenas a prova do item $a.$ e deixaremos o item $b.$ para o leitor.

$$\begin{aligned} x \in B \cap \bigcup_{i\in I} A_i \quad &\Leftrightarrow \quad x \in B \text{ e } x \in \bigcup_{i\in I} A_i \quad \Leftrightarrow \quad x \in B \text{ e } \Big(\exists i \in I,\ x \in A_i\Big) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists i \in I,\ \Big(x \in B \text{ e } x \in A_i\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \exists i \in I,\ \Big(x \in B \cap A_i\Big) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i) \end{aligned}$$

□

Teorema 3.34 (Leis de De Morgan). *Seja $\{A_i : i \in I\}$ uma família indexada de conjuntos qualquer e B um conjunto arbitrário, então:*

a. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$;

b. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$;

Existe uma notação alternativa para uniões e interseções arbitrárias quando o família de conjuntos não é indexada. Seja $\mathcal{F}$ uma coleção de conjuntos qualquer. Vamos denotar a reunião de todos os elementos da família por

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x; (\exists A \in \mathcal{F})\ x \in A\},$$

ou seja, $x \in \bigcup \mathcal{F} \Leftrightarrow (\exists A \in \mathcal{F})\ x \in A$.

Analogamente,

$$\bigcap \mathcal{F} = \{x; (\forall A \in \mathcal{F})\ x \in A\},$$

e assim, $x \in \bigcap \mathcal{F} \Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{F})\ x \in A$.

Obviamente, caso a coleção $\mathcal{F}$ possa ser indexada por um conjunto de índices I, teremos $\mathcal{F} = \{A_i; i \in I\}$ e

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{i\in I} A_i \qquad \text{e} \qquad \bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{i\in I} A_i$$

3.7 Exercícios

1. Prove as seguintes afirmações:

   (a) $A - B \subset A$.

   (b) $A \cap B \subset A$.

   (c) $A \cup B \supseteq A$.

   (d) $A \cap B \subset A \cup B$.

   (e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

   (f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(g) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$.

(h) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

(i) $(A^c)^c = A$.

(j) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset P(A \cup B)$

(k) $\mathcal{P}(A \cap B) = P(A) \cap \mathcal{P}(B)$

(l) $A \cap A^c = \emptyset$.

2. Faça as demonstrações das propriedades P_9 a P_{12} da página 35.

3. Sejam A, B, C e D conjuntos. Prove as afirmações abaixo.

   (a) $A \subset B^c$ se e somente se $A \cap B = \varnothing$.

   (b) Se $A \cup B = C$ e $A \cap B = \varnothing$ então $B = C - A$.

   (c) $A \subset C$ e $B \subset C$ é equivalente a $A \cup B \subset C$.

   (d) Se $A \subset C$ e $B \subset D$, então $A \cup B \subset C \cup D$.

   (e) Se $A \cap C = A \cap B$ e $A \cup C = A \cup B$, então $B = C$.

   (f) $A - B \subset B$ se e somente se $A - B = \varnothing$.

   (g) $A \cup B \neq \varnothing$ se e somente se $A \neq \varnothing$ ou $B \neq \varnothing$.

   (h) $A = B$ se e somente se $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$

   (i) $A \cap B = \varnothing$ se e somente se $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \varnothing$

4. Sejam A, B e C conjuntos. Prove as seguintes proposições:

   (a) Se A está contido em B, então $A \cap B^c = \varnothing$.

   (b) $A \cup (A \cap B) = A$.

   (c) $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$.

   (d) Se $A \cap C = \varnothing$ então $A \cap (B \cup C) = A \cap B$.

   (e) Se $A \subset B$ então $A = B - (B - A)$.

   (f) $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$

5. Demonstre as propriedades de diferença simétrica listadas na página 36.

6. Considere a seguinte família de intervalos fechados $\mathcal{F} = \{A_n = [0, 1/n]; n \in \mathbb{N}\}$. Encontre:

   (a) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{365} A_n$

   (b) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

   (c) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$

   (d) $\displaystyle[-1, 1/2] \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

7. Mostre que:

   (a) $\displaystyle B \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B \cap A_n)$

   (b) $\displaystyle B - \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} (B - A_\alpha^c)$

Capítulo 4

Produto Cartesiano

4.1 Pares Ordenados

Definição 4.1. *Dados dois elementos, x e y, chamaremos de par ordenado um terceiro elemento denotado (x, y). Diremos que x é a primeira coordenada e y é a segunda coordenada do par ordenado (x, y).*

Aqui o adjetivo "ordenado" enfatiza que a ordem na qual os elementos x e y aparecem entre os parênteses é essencial. Também é comum chamar os elementos x e y de primeira projeção e segunda projeção do par ordenado (x, y), respectivamente, e denotar isso por:

$$x = \pi_1(x, y) \quad \text{e} \quad y = \pi_2(x, y)$$

Note que o par ordenado (a, b) não é o mesmo que o conjunto $\{a, b\}$.

Definição 4.2. *Dizemos que dois pares ordenados (x, y) e (a, b) são iguais se e somente se $x = a$ e $y = b$. Simbolicamente, temos:*

$$(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a \text{ e } y = b$$

Em particular, $(x, y) = (y, x)$ se e somente se $x = y$.

4.2 Produto cartesiano de dois conjuntos

Em geometria analítica convencionamos associar a cada ponto do plano um par ordenado de números reais (fixando uma origem e um par de eixos ortogonais). O plano cartesiano, como conhecemos, é o conjunto de todos os pares ordenados de números reais. Vamos formalizar esse conceito.

Definição 4.3. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. O conjunto de todos os pares ordenados (x, y), com $x \in A$ e $y \in B$, é chamado o produto cartesiano de A e B, e denotado $A \times B$. Simbolicamente*

$$A \times B = \{(x, y); x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Exemplo 4.4. Sejam $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ então

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\} \quad e \\ B \times A &= \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}. \end{aligned}$$

Note que, em geral, $A \times B \neq B \times A$.

Observação: Se os conjuntos A e B são finitos, com número de elementos $n(A) = m$ e $n(B) = n$, então o produto cartesiano $A \times B$ também é um conjunto finito com $n(A \times B) = m \cdot n$, ou seja,

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B).$$

Exemplo 4.5. Retornando à geometria analítica, é comum descrever produtos cartesianos ou conjuntos de pares ordenados fazendo menção ao objeto geométrico que estes conjuntos descrevem.

1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$ é identificado com o plano cartesiano usual da geometria analítica;

2. $[0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y);\ x, y \in \mathbb{R} \text{ e } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ e } 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ pode ser descrito geometricamente como um quadrado (fechado) de lado 1 com vértices nos pontos $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ e $(0, 1)$ do plano cartesiano.

   Uma forma mais comum de escrever esse conjunto é observar que $[0, 1] \times [0, 1]$ é subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e escrever $[0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$.

   Neste caso, a expressão $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ deve ser entendida como $0 \leqslant x \leqslant 1$ e $0 \leqslant y \leqslant 1$.

3. $[-2, 2] \times [-1, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; |x| \leqslant 1 \text{ e } |y| \leqslant 2\}$ pode ser descrito geometricamente como um retângulo de base 4 e altura 2 do plano cartesiano.

4. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x^2 + y^2 = 1\}$ pode ser descrito geometricamente como o círculo de raio 1 e centro no ponto $(0, 0)$ do plano cartesiano. Note que S^1 é um conjunto de pares ordenados, porém não é possível escrevê-lo como um produto cartesiano de dois conjuntos.

5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x^2/25 + y^2/9 = 1\}$ pode ser descrito geometricamente como a elipse com focos nos pontos $F_1 = (4, 0)$ e $F_2 = (-4, 0)$ do plano cartesiano.

4.3 Quadrado cartesiano de um conjunto

No caso particular em que $B = A$, o produto cartesiano $A \times A$ é chamado de quadrado cartesiano de A ou apenas o quadrado do conjunto A, denotado A^2, que se lê: "A dois",

$$A^2 = \{(x, y); x, y \in A\}.$$

O conjunto de todos os pares ordenados da forma (x, x), com $x \in A$, é chamado de diagonal do quadrado A^2 e indicado por D_A, ou seja,

$$D_A = \{(x, x); x \in A\}$$

Se o conjunto A é finito e tem m elementos, o quadrado cartesiano A^2 também é um conjunto finito e tem m^2 elementos. Obviamente, a diagonal D_A de A também é um conjunto finito e tem m elementos.

Exemplo 4.6. Considere o conjunto $A = \{a, b, c\}$, então

$$A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

e $D_A = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$.

Observe-se que o quadrado A^2 tem exatamente $3^2 = 9$ elementos e que a sua diagonal D_A tem 3 elementos.

Observação: Dispondo os elementos de A^2 em forma de quadrado, os pares ordenados (a,a), (b,b), e (c,c) estarão dispostos na diagonal indicada abaixo,

$$\begin{array}{ccc} \boxed{(a,a)} & (a,b) & (a,c) \\ (b,a) & \boxed{(b,b)} & (b,c) \\ (c,a) & (c,b) & \boxed{(c,c)} \end{array}$$

Exemplo 4.7. No caso em que $A = \mathbb{R}$, o quadrado é $\mathbb{R}^2 = \{(x,y); x, y \in \mathbb{R}\}$ e sua diagonal é $D_{\mathbb{R}} = \{(x,x); x \in \mathbb{R}\}$.

4.4 Propriedades do produto cartesiano

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer:

P_1. $A \times B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$;

Suponha, por absurdo, que $A \neq \varnothing$ e $B \neq \varnothing$, neste caso existe pelo menos um elemento $x_o \in A$ e pelo menos um elemento $y_o \in B$, logo $(x_o, y_o) \in A \times B$, o que contraria a hipótese de $A \times B = \varnothing$.

Observação: Note que a prova acima não está completa, pois a demonstração de um teorema do tipo "se e somente se" deve sempre ter duas partes: suficiência ($\Rightarrow$) e necessidade ($\Leftarrow$). Na propriedade acima está provada somente a suficiência (usando a técnica de redução ao absurdo).

Isso é bastante comum quando a demonstração da outra implicação é "trivial". Neste caso, para provar a necessidade, devemos supor que um dos conjuntos, A ou B, é vazio, neste caso é óbvio que não existirão pares ordenados em $A \times B$.

A moral da história aqui é a seguinte: quando o autor não fala nada de uma parte da demonstração é porque (muito provavelmente) essa parte da demonstração é trivial. No seu caso, como estudante, jamais deixe de fazer uma demonstração por achá-la fácil. Caso não haja realmente o que escrever, diga pelo menos que a prova é trivial, evidente ou consequência direta da definição ou de outro resultado.

P_2. Se A e B são não vazios então $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$;

Na propriedade acima um dos lados é trivial. Antes de ler a prova abaixo, tente descobrir qual é o lado trivial e qual merece uma prova mais detalhada.

Para a suficiência vamos provar pela contrapositiva, ou seja, sabendo que $A \neq B$ mostraremos que $A \times B \neq B \times A$.

Como $A \neq B \Leftrightarrow A \not\subset B$ ou $B \not\subset A \Leftrightarrow (i)(\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$ ou $(ii)(\exists y)(y \in B \wedge y \notin A)$.

No caso (i), da hipótese $B \neq \varnothing$ sabemos que existe $y_o \in B$. Logo $(x, y_o) \in A \times B$ e $(x, y_o) \notin B \times A$, pois $x \in A$ e $x \notin B$. O caso (ii) é análogo e fica como exercício.

A necessidade segue diretamente da definição.

P_3. $A \subset B \Rightarrow$ (i) $A \times C \subset B \times C$ e (ii) $C \times A \subset C \times B$;

Para provar (i), basta mostrar que todo elemento $(x,y) \in A \times C$ também é elemento de $B \times C$. Mas $(x,y) \in A \times C \Leftrightarrow x \in A$ e $y \in C$. Como $A \subset B$ então $x \in B$ e $y \in C \Leftrightarrow (x,y) \in B \times C$. A prova de (ii) é análoga e fica como exercício.

P_4. Se A é não vazio então $A \times B \subset A \times C \Leftrightarrow B \subset C$;

Note que a proposição é verdadeira no caso particular em que $B = \varnothing$. Logo podemos supor que $B \neq \varnothing$. Seja $y \in B$ um elemento qualquer, como $A \neq \varnothing$ então existe $x \in A$. Assim

$$x \in A \text{ e } y \in B \Rightarrow (x,y) \in A \times B \Rightarrow (x,y) \in A \times C \Rightarrow x \in A \text{ e } y \in C \Rightarrow y \in C.$$

Como a prova acima vale para qualquer $y \in B$, podemos concluir que $B \subset C$.

$P_{4'}$. Se A é não vazio então $B \times A \subset C \times A \Leftrightarrow B \subset C$;

Essa prova fica como exercício, pois a ideia é a mesma da propriedade anterior.

P_5. Distributividade do produto cartesiano em relação a interseção, a reunião e a diferença:

a. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
b. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
c. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
d. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
e. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
f. $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

Vamos fazer a prova de apenas duas das proposições acima para ilustrar todos os passos. Pense na justificativa para cada uma das passagens e porque essa lista de equivalências é suficiente para garantir a prova.

$$\begin{aligned}
(x,y) \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } y \in (B \cup C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ e } (y \in B \text{ ou } y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ e } y \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ e } y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \text{ ou } (x,y) \in A \times C \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(x,y) \in A \times (B - C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } y \in (B - C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ e } (y \in B \text{ e } y \notin C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \in A) \text{ e } (y \in B \text{ e } y \notin C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ e } (x \in A \text{ e } y \in B) \text{ e } y \notin C \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ e } (y \in B \text{ e } x \in A) \text{ e } y \notin C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ e } y \in B) \text{ e } (x \in A \text{ e } y \notin C) \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \text{ e } (x,y) \notin A \times C \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in \big((A \times B) - (A \times C)\big)
\end{aligned}$$

4.5 n-uplas ordenadas

Definição 4.8. *Fixado um número natural n, chamaremos de n-upla ordenada ao elemento $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Neste caso, para cada j $(1 \leqslant j \leqslant n)$. dizemos que x_j é a j-ésima coordenada da n-upla ordenada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e usaremos a notação $x_j = \pi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para indicar esse fato.*

Assim como no caso de pares ordenados, a ordem dos elementos é importante e a lista de elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pode conter repetições.

Com essa notação, um par ordenado é uma n-upla ordenada com n = 2. Quando $n = 3, 4, 5 \ldots$ costuma-se usamos os nomes tripla ordenada, quádrupla ordenada, quíntupla ordenada etc. Também é válido falar 5-upla ordenada, 8-upla ordenada e assim por diante.

Definição 4.9. *Dizemos que duas n-uplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ são iguais se todo elemento da primeira é igual ao elemento correspondente da segunda. Isto é*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow a_j = x_j, \forall j \text{ com } 1 \leqslant j \leqslant n.$$

4.6 Produto cartesiano de vários conjuntos

A noção de produto cartesiano, definida para dois conjuntos, pode ser estendida para qualquer número natural $n > 2$ de conjuntos.

Definição 4.10. *Chamaremos de produto cartesiano dos n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (na ordem em que estão escritos) ao conjunto de todas as n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tais que $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n$, e denotamos esse conjunto por*

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \quad \text{ou} \quad \prod_{j=1}^{n} A_j,$$

dessa forma

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n} A_j &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n); x_1 \in A_1 \text{ e } x_2 \in A_2 \text{ e } \ldots \text{ e } x_n \in A_n\} \\ &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n); \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ x_j \in A_j\},\end{aligned}$$

ou seja

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \prod_{j=1}^{n} A_j \Leftrightarrow \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ x_j \in A_j.$$

Os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são chamados de fatores do produto cartesiano $\prod_{j=1}^{n} A_j$.

No caso particular em que todos os fatores são iguais $A = A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, o produto cartesiano $A \times A \times \ldots \times A$ (n vezes) recebe o nome de n-ésima potência cartesiana de A. Denotamos esse conjunto A^n, notação que é lida "A ene".

$$A^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) :\ x_j \in A, \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

A diagonal de A^n é o conjunto de todas as n-uplas $(x, x, \ldots, x)$ tais que $x \in A$.

Exemplo 4.11. Dados $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ e $C = \{c_1, c_2\}$ temos

$$\begin{aligned}A \times B \times C &= \big\{(a_1, b_1, c_1), (a_1, b_1, c_2), (a_1, b_2, c_1), (a_1, b_2, c_2), (a_1, b_3, c_1), (a_1, b_3, c_2), \\ &\quad (a_2, b_1, c_1), (a_2, b_1, c_2), (a_2, b_2, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_2, b_3, c_1), (a_2, b_3, c_2)\big\}; \\ A^3 &= \big\{(a_1, a_1, a_1), (a_1, a_1, a_2), (a_1, a_2, a_1), (a_1, a_2, a_2), \\ &\quad (a_2, a_1, a_1), (a_2, a_1, a_2), (a_2, a_2, a_1), (a_2, a_2, a_2)\big\}; \\ D_{A^3} &= \big\{(a_1, a_1, a_1), (a_2, a_2, a_2)\big\}; \\ D_{B^4} &= \big\{(b_1, b_1, b_1, b_1), (b_2, b_2, b_2, b_2), (b_3, b_3, b_3, b_3)\big\}.\end{aligned}$$

4.7 Exercícios

1. Calcule os seguintes produtos cartesianos:

   (a) $\{1\} \times \{1,2\}$
   (b) $\{1,2\} \times \{1\}$
   (c) $\{-1,1\} \times \{0,1\}$
   (d) $\{a,b\} \times \{c,d\} \times \{e,f\}$
   (e) $\{A,B\} \times \{\varnothing\}$
   (f) $\{A,B\} \times \varnothing$
   (g) $\{1,2\}^2$
   (h) $\{1,2\}^3$

2. Sejam A, B, C e D conjuntos. Prove ou dê um contra-exemplo:

   (a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
   (b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
   (c) $(A \times B) \cap (A^c \times B) = \varnothing$.
   (d) $A \subset B$ e $C \subset D \Rightarrow A \times C \subset B \times D$.
   (e) $A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$.
   (f) $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$.
   (g) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
   (h) $A \times (B - C) = A \times B - A \times C$.

Capítulo 5

Relações

Quando pensamos em relações ou em "estar relacionado", a primeira coisa que vem a nossa mente são relações pessoais ou familiares, por exemplo:

- Rose tem uma relação com Paulo (são casados);
- Beto e Marisa são primos (têm uma relação de parentesco);
- Amanda e Débora são irmãs.

Obviamente estamos mais interessados em relações dentro do contexto matemático, por exemplo:

- $2 \leqslant 5$, isto é, 2 está relacionado com 5 pela relação menor ou igual, e
- $[1,2] \subset \mathbb{R}_+$, ou seja, o intervalo $[1,2]$ está relacionado com o conjunto dos números reais positivos pela relação de inclusão.

5.1 Relação binária

Uma relação binária (ou apenas relação) é definida sempre sobre dois conjuntos, A e B, que podem ser iguais ou diferentes, estabelecendo alguma regra para "relacionar" um elemento $a \in A$ com outro elemento $b \in B$. Em outras palavras, para definir uma relação de A em B devemos escolher (ou dizer como devem ser escolhidos) certo pares ordenados (a,b) no produto cartesiano $A \times B$.

Definição 5.1. *Dados dois conjuntos A e B, uma relação $\mathcal{R}$ de A para B (ou de A em B) é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.*
No caso em que $A = B$ dizemos apenas que $\mathcal{R}$ é uma relação em A.

Exemplo 5.2.

(a) Dados $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{x,y,z\}$ podemos definir relações de A em B escolhendo pares ordenados aleatoriamente em $A \times B$, por exemplo:

$$\mathcal{R}_1 = \{(1,x)\}, \quad \mathcal{R}_2 = \{(1,x),(3,z)\} \text{ e } \mathcal{R}_3 = \{(1,x),(2,x),(3,x),(3,y)\}.$$

Convém notar que produto cartesiano $A \times B$ tem 9 elementos, logo o conjunto das partes $\mathcal{P}(A \times B)$ possui $2^9 = 512$ elementos. Isso significa que podemos definir 512 relações diferentes de A em B!

Observe também que $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_3$, porém $\mathcal{R}_2 \not\subset \mathcal{R}_3$.

(b) Considere a seguinte relação no conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$$\mathcal{M} = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 : p < q\}.$$

Neste caso $(p, q) \in \mathcal{M} \Leftrightarrow p < q$.

Obviamente a notação universal $p < q$ é muito mais conveniente em praticamente todas as situações. A notação de par ordenado e de subconjunto de um produto cartesiano é bastante conveniente em demonstrações de resultados teóricos.

Também podemos considerar as relações

$$\mathcal{M}' = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 : p \leqslant q\} \text{ e } \mathcal{M}'' = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 : p > q\}.$$

Note que $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$, $\mathcal{M} \neq \mathcal{M}'$, $(\mathcal{M}')^c = \mathcal{M}''$ e $\mathcal{M}' \cup \mathcal{M}'' = \mathbb{N}^2$.

(c) Considere os conjuntos $D = \{0, 1\}$ e $A = \mathcal{P}(D)$. Vamos definir uma relação em A da seguinte forma:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A : x \subset y\}$$

A notação nada usual "$x \subset y$" foi escolhida propositalmente para causar estranhamento e fazer você parar e pensar: "o que isso significa?"

Note que o conjunto $A = \mathcal{P}(D)$ é na verdade uma família de conjuntos, ou seja, seus elementos são conjuntos e portanto faz sentido verificar se um elemento está ou não contido em outro. Obviamente a notação de letras minúsculas aqui não é comum, mas também não está errada.

Nesse exemplo temos $A = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, D\}$ e

$$\mathcal{R} = \{(\varnothing, \varnothing), (\varnothing, \{0\}), (\varnothing, \{1\}), (\varnothing, D), (\{0\}, \{0\}), (\{1\}, \{1\}), (\{0\}, D), (\{1\}, D), (D, D)\}.$$

(d) Dado um conjunto A qualquer, há sempre três relações triviais que podemos considerar

(a) Relação vazia: que corresponde ao conjunto vazio $\varnothing \subset A^2$;

(b) Relação total: que corresponde ao próprio conjunto $A^2 \subset A^2$;

(c) Relação diagonal: $\Delta_{A^2} = \{(a, b) \in A^2; b = a\}$;

Por exemplo, para $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y\}$, teremos $\Delta_{A^2} = \{(0, 0)(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ e $\Delta_{B^2} = \{(x, x), (y, y)\}$.

A relação diagonal também costuma ser chamada de relação identidade, e denotada I_A ou Id_A. Também convém notar que o número de elementos de Δ_{A^2} é igual ao de A.

5.2 Domínio e imagem de uma relação e relação inversa

Para desenvolver um estudo mais profundo de relações, considere os seguintes conceitos e notações.

Definição 5.3. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer e $\mathcal{R}$ uma relação de A em B.*

i) O domínio de $\mathcal{R}$ é o conjunto $Dom(\mathcal{R}) = \{a \in A : \exists b \in B, (a, b) \in \mathcal{R}\}$;

ii) A imagem de $\mathcal{R}$ é o conjunto $Im(\mathcal{R}) = \{b \in B : \exists a \in A, (a, b) \in \mathcal{R}\}$;

iii) A relação inversa de $\mathcal{R}$ é a relação $\mathcal{R}^{-1}$ de B em A definida por

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in \mathcal{R}\}.$$

Exemplo 5.4. Vamos encontrar o domínio e a imagem dos três exemplos anteriores:

(a) Recordando que $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y, z\}$. Logo

▷ para $\mathcal{R}_1 = \{(1, x)\}$;

$$\text{Dom}(\mathcal{R}_1) = \{1\}, \quad Im(\mathcal{R}_1) = \{x\} \text{ e } \mathcal{R}_1^{-1} = \{(x, 1)\};$$

▷ para $\mathcal{R}_2 = \{(1, x), (3, z)\}$;

$$\text{Dom}(\mathcal{R}_2) = \{1, 3\}, \quad Im(\mathcal{R}_2) = \{x, z\} \text{ e } \mathcal{R}_2^{-1} = \{(x, 1), (z, 3)\};$$

▷ para $\mathcal{R}_3 = \{(1, x), (2, x), (3, x), (3, y)\}$.

$$\text{Dom}(\mathcal{R}_3) = A, \quad Im(\mathcal{R}_3) = \{x, y\} \text{ e } \mathcal{R}_3^{-1} = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 3)\}.$$

(b) No exemplo $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A : x \subset y\}$ com $A = \mathcal{P}(\{0, 1\})$ temos

$$Dom(\mathcal{R}) = Im(\mathcal{R}) = A = \mathcal{P}(\{0, 1\}).$$

(c) No exemplo $\mathcal{M} = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 : p < q\}$, temos

▷ $Dom(\mathcal{M}) = \{p \in \mathbb{N} : (\exists q \in \mathbb{N})\,(p, q) \in \mathcal{M}\} = \{p \in \mathbb{N} : (\exists q \in \mathbb{N}), p < q\} = \mathbb{N}$

▷ $Im(\mathcal{M}) = \{q \in \mathbb{N} : (\exists p \in \mathbb{N})\,(p, q) \in \mathcal{M}\} = \{q \in \mathbb{N} : (\exists p \in \mathbb{N})\, p < q\} = \mathbb{N} - \{1\}$

Teorema 5.5. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer e $\mathcal{R}$ uma relação de A em B. Então*

1. $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$.
2. $Dom(\mathcal{R}^{-1}) = Im(\mathcal{R})$;
3. $Im(\mathcal{R}^{-1}) = Dom(\mathcal{R})$;

Dem.:

1. Note que $\mathcal{R}^{-1}$ é uma relação de B em A, logo $(\mathcal{R}^{-1})^{-1}$ é uma relação de A em B, assim como $\mathcal{R}$. Para ver que $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}^{-1}$, seja (a, b) um par ordenado qualquer em $A \times B$. Então

$$(a, b) \in (\mathcal{R}^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (b, a) \in \mathcal{R}^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in \mathcal{R}.$$

2. Observe que $Dom(\mathcal{R}^{-1})$ e $Im(\mathcal{R})$ são ambos subconjuntos de B. Agora, seja $b \in B$ um elemento arbitrário, então

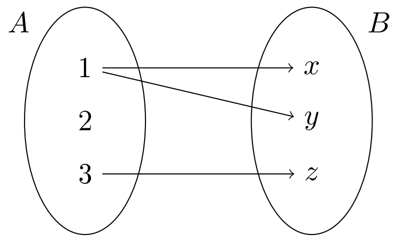
$$b \in Dom(\mathcal{R}^{-1}) \Leftrightarrow \exists a \in A, (b, a) \in \mathcal{R}^{-1} \Leftrightarrow \exists a \in A, (a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow (a, b) \in Im(\mathcal{R})$$

3. Exercício (tente repetir os argumentos do item anterior usando as definições corretas).

□

5.3 Visualizando relações

Uma forma bastante útil de visualizar uma relação é desenhar um diagrama de Venn com setas. Por exemplo, a figura abaixo mostra um diagrama da relação $\mathcal{R} = \{(1,x),(1,y),(3,z)\}$ definida do conjunto $A = \{1,2,3\}$ no conjunto $B = \{x,y,z\}$. Na figura, cada um destes conjuntos é representado por um oval envolvendo os elementos do conjunto e cada par ordenado é representado por uma seta. Por exemplo, há uma seta partindo do ponto $1 \in A$ e chegando no ponto $y \in B$ pois o par ordenado $(1,y) \in \mathcal{R}$.



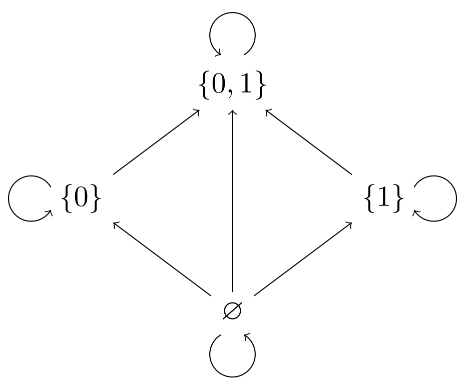
Neste tipo de representação, os pontos que representam os elementos de A e B são chamados vértices, e as setas que representam os pares ordenados em $\mathcal{R}$ são chamadas de arestas. Não importa como os vértices que representam elementos de A e B estão dispostos na representação, o que realmente importa é que os extremos correspondam precisamente aos pares ordenados da relação $\mathcal{R}$.

Essa representação gráfica pode ajudá-lo a compreender os conceitos discutidos na última seção. Por exemplo: o domínio de $\mathcal{R}$ corresponde aos vértices em A que têm arestas partindo deles; enquanto que a imagem de $\mathcal{R}$ consiste nos elementos de B cujos vértices têm arestas apontando para eles.

Na figura acima identificamos facilmente que $Dom(\mathcal{R}) = \{1,3\}$ e $Im(\mathcal{R}) = \{x,z\}$. Além disso, para obter a representação gráfica da relação inversa $\mathcal{R}^{-1}$ basta reverter as direções de todas as arestas.

Quando $\mathcal{R}$ é uma relação em A ($\mathcal{R} \subset A \times A$), existe uma representação gráfica ligeiramente diferente e mais conveniente. Se usássemos o método descrito acima, precisaríamos desenhar duas cópias do conjunto A, com vértices em ambos e as arestas correspondentes aos pares ordenados de $\mathcal{R}$.

Uma maneira mais simples de representar graficamente essa relação é desenhar apenas uma cópia de A e então conectar os vértices que representam os elementos de A com arestas para representar os pares ordenados em R. Por exemplo, na figura abaixo usamos essa representação para representar a relação de inclusão no conjunto das partes de $D = \{0,1\}$ (vista no item (b) do exemplo 5.2).



Observe que nesta representação gráfica, há uma aresta conectando $\varnothing$ a ele mesmo, pois

$(\varnothing, \varnothing) \in \mathcal{R}$, ou seja, $\varnothing \subset \varnothing$. Arestas como esta (que vão de um vértice para ele mesmo) são chamadas de *laços*.

Note que na representação acima há um laço em cada vértice (indicando que cada conjunto está contido em si mesmo) e as arestas indicam quais conjuntos estão contidos nos outros.

Este tipo de representação gráfica é conhecida como *Diagrama Sagital*.

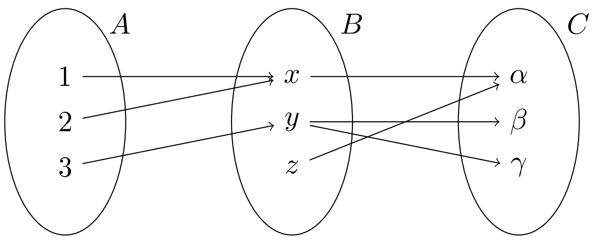
5.4 Composição de relações

Definição 5.6. *Seja $\mathcal{R}$ uma relação de A em B e $\mathcal{S}$ uma relação de B em C. Definimos a relação composta $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ de A em C da seguinte forma:*

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(a, c) \in A \times C; (\exists b \in B)\ (a, b) \in \mathcal{R} \text{ e } (b, c) \in \mathcal{S}\}.$$

Exemplo 5.7. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y, z\}$ e $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ três conjuntos dados e considere as seguintes relações

$$\mathcal{R} = \{(1, x), (2, x), (3, z)\} \subset A \times B \text{ e}$$
$$\mathcal{S} = \{(x, \alpha), (y, \beta), (y, \gamma), (z, \alpha)\} \subset B \times C.$$



Note que $(1, \alpha) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, pois $(1, x) \in \mathcal{R}$ e $(x, \alpha) \in \mathcal{S}$. Na

Na representação gráfica acima é fácil ver que o par ordenado $(1, \alpha) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, pois há uma aresta partindo de 1 e chegando em x e outra aresta partindo de x e chegando em α.

Assim

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1, \alpha), (2, \alpha), (3, \beta), (3, \gamma)\}$$

Teorema 5.8. *Considere as relações $\mathcal{R} \subset A \times B$, $\mathcal{S} \subset B \times C$ e $\mathcal{T} \subset C \times D$, então:*

1. $\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$;
2. $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$.

Dem.: Provaremos apenas o item *1.* e deixaremos o item *2.* como exercício.

Claramente $\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$ e $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$ são relações de A a D. Seja $(a, d) \in A \times B$ um elemento qualquer.

Se $(a, d) \in \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$, pela definição de composição, existe um elemento $c \in C$ tal que $(a, c) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ e $(c, d) \in \mathcal{T}$. Agora, como $(a, c) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, podemos usar novamente a definição de composição e obter um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in \mathcal{R}$ e $(b, c) \in \mathcal{S}$.

Agora, sabendo que $(b, c) \in \mathcal{S}$ e $(c, d) \in \mathcal{T}$, podemos concluir que $(b, d) \in \mathcal{T} \circ \mathcal{S}$. Da mesma forma, de $(a, b) \in \mathcal{R}$ e $(b, d) \in \mathcal{T} \circ \mathcal{S}$, segue-se que $(a, d) \in (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$. Isso prova que $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} \subset (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$

Para provar a inclusão contrária e concluir a prova, basta repetir o argumento acima a partir de um elemento $(a, d) \in (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$, para mostrar que $(a, d) \in (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$.

$\square$

5.4.1 Exercícios

1. Dados $A = \{1, 2\}$ e $B = \{0\}$, encontre: (a) todas as relações de A em B; (b) todas as relações em A; e (c) todas as relações em B.

2. Construa um diagrama sagital para cada uma das relações abaixo definidas em $A = \{1, 2, 3, 4\}$

   a. $x\ \mathcal{R}_1\ y \Leftrightarrow x < y$;

   b. $x\ \mathcal{R}_2\ y \Leftrightarrow x \leqslant y$;

   c. $x\ \mathcal{R}_3\ y \Leftrightarrow x = y$;

   d. $x\ \mathcal{R}_4\ y \Leftrightarrow x + y \leqslant 5$;

   e. $x\ \mathcal{R}_5\ y \Leftrightarrow x = 1$.

   f. $x\ \mathcal{R}_6\ y \Leftrightarrow y = 3$.

   g. $x\ \mathcal{R}_7\ y \Leftrightarrow y = 2x$.

   h. $x\ \mathcal{R}_0\ y \Leftrightarrow x > 2y$.

3. Encontre o domínio e a imagem de cada uma das relações do item anterior.

4. Encontre o domínio e a imagem de cada uma das relações abaixo.

   a. $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$

   b. $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : y = \sqrt{x}\}$

   c. $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : y > x\}$

   d. $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x|y\}$ **

   ** a notação $x|y$ significa que "x divide y", ou seja, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y = kx$.

5. Encontre o domínio e a imagem de cada uma das relações do item anterior.

6. Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ relações em $A \times B$.

   (a) $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$, $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ e $\mathcal{R} - \mathcal{S}$ são relações em $A \times B$? Justifique sua resposta.

   (b) $\mathcal{R}^c$ é uma relação de A em B? Em caso afirmativo, como podemos defini-la?

   (c) A espressão $\mathcal{R} - \mathcal{S} = \mathcal{R} \cap \mathcal{S}^c$ vale para relações? Justifique sua resposta.

5.5 Propriedades de uma relação

A vantagem de definir relações como um conjunto de pares ordenados é poder dar uma definição muito simples (basta conhecer o conceito de subconjuntos e produto cartesiano) e colocar a nossa disposição todo o ferramental de teoria dos conjuntos para enunciar e demonstrar propriedades a respeito de relações.

Entretanto, a notação mais usada pelos matemáticos para expressar uma relação entre dois objetos é colocar algum símbolo entre eles. Por exemplo, as notações $x = y$ e $x \leqslant y$ expressam duas relações matemáticas bastante conhecidas1.

Imitando essa notação, dada uma relação $\mathcal{R}$ de A em B vamos escrever:

$$a\mathcal{R}b \iff (a, b) \in \mathcal{R}$$

e dizer que a está $\mathcal{R}$-relacionado com b.

Vamos introduzir três importantes propriedades de um relação sobre um conjunto

Definição 5.9. *Suponha que $\mathcal{R}$ é uma relação em A, diremos que:*

i. *$\mathcal{R}$ é reflexiva se $(\forall x \in A)\ x\mathcal{R}x$;*

ii. *$\mathcal{R}$ é simétrica se $(\forall x, y \in A)\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$;*

iii. $\mathcal{R}$ *é transitiva se* $(\forall x, y, z \in A)$ $x\mathcal{R}y$ *e* $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$*;*

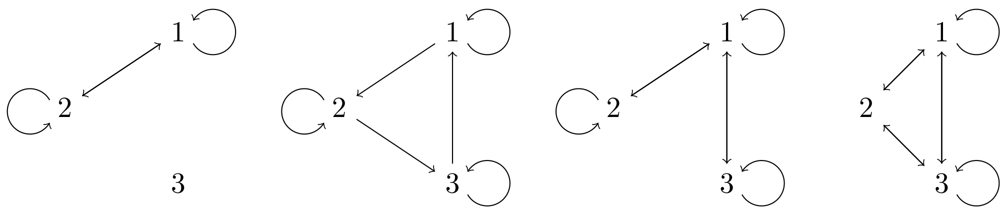
Exemplo 5.10. Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ considere as seguintes relações

1. $\mathcal{R}_1 = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,1)\}$ é simétrica e transitiva, porém não é reflexiva. De fato, $(3,3) \notin \mathcal{R}_1$;

2. $\mathcal{R}_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3), (1,3)\}$ é reflexiva e transitiva, porém não é simétrica. De fato, $(1,2) \in \mathcal{R}_1$ e $(2,1) \notin \mathcal{R}_1$;

3. $\mathcal{R}_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1)\}$ é reflexiva e simétrica, porém não é transitiva. De fato, $(2,1) \in \mathcal{R}_1$ e $(1,3) \in \mathcal{R}_1$, mas $(2,3) \notin \mathcal{R}_1$;

4. $\mathcal{R}_4 = \{(1,1), (3,3), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)\}$ é simétrica. Porém não é reflexiva e nem transitiva.



relação $\mathcal{R}_1$ relação $\mathcal{R}_2$ relação $\mathcal{R}_3$ relação $\mathcal{R}_4$

No caso de conjuntos finitos, a forma simples de identificar quais propriedades a relação satisfaz é construindo os diagrama de setas acima. Em termos de diagramas, as propriedades podem ser caracterizadas da seguinte forma:

i. a relação é reflexiva se todo vértice possui um laço;

ii. a relação é simétrica se para cada aresta conectando dois pontos diferentes há uma aresta no sentido contrário conectando estes mesmos dois pontos, ou uma "seta dupla".

iii. a relação é transitiva se para cada par de arestas conectando três vértices consecutivos, existir uma terceira aresta conectando o primeiro e o terceiro vértices (ou um laço, caso o primeiro e o terceiro vértice coincidam).

No exemplo abaixo, o domínio é um conjunto infinito. Neste caso os diagramas de seta não tem utilidade.

Exemplo 5.11. Considere a seguinte relação no conjunto dos números reais:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \ \Leftrightarrow\ |x - y| < 1.$$

i. $\mathcal{R}$ é reflexiva pois $|x - x| = 0 < 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

ii. $\mathcal{R}$ é simétrica pois, dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos $x\mathcal{R}y \Rightarrow |x-y| < 1 \Rightarrow |y-x| = |x-y| < 1 \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

iii. $\mathcal{R}$ **não** é transitiva. Para provar isso basta apresentar um contra exemplo. Note que $2\mathcal{R}\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}\mathcal{R}\pi$, porém $2 \not\mathcal{R} \pi$.

Teorema 5.12. *Seja* $\mathcal{R}$ *uma relação em um conjunto* A*.*

a. $\mathcal{R}$ é reflexiva se e somente se a diagonal $\triangle_{A^2} \subset \mathcal{R}$;

b. $\mathcal{R}$ é simétrica se e somente se $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$;

c. $\mathcal{R}$ é transitiva se e somente se $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$.

Dem.: Vamos provar apenas o item b., os demais itens ficam como exercícios.

Primeiramente, sabendo que $\mathcal{R}$ é simétrica, precisamos provar que $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$. Para isso, vamos provar que esses dois conjuntos de pares ordenados $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}^{-1}$ tem os mesmos elementos.

Seja $(a, b) \in \mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}$ é simétrica então $(b, a) \in \mathcal{R}$ e consequentemente $(a, b) \in \mathcal{R}^{-1}$. Isso mostra que todo elemento de $\mathcal{R}$ também é elemento de $\mathcal{R}^{-1}$, ou seja, $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^{-1}$. Para provar a inclusão contrária, seja $(b, a) \in \mathcal{R}^{-1} \Rightarrow (a, b) \in \mathcal{R}$ e, pela simetria de $\mathcal{R}$, $(b, a) \in \mathcal{R}$. Isso prova que $\mathcal{R}^{-1} \subset \mathcal{R}$. Portanto $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$.

Por outro lado, sabendo que $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$, precisamos provar que a relação $\mathcal{R}$ é simétrica. Para isso, seja $(a, b) \in \mathcal{R}$ um elemento qualquer. Como $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$ então $(a, b) \in \mathcal{R}^{-1} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R}$.

□

Observação 5.13. *Cada um dos itens no teorema acima é uma proposição do tipo "se e somente se", portanto é necessário provar a ida ($\Rightarrow$) e a volta ($\Leftarrow$) em cada um deles. Na demonstração do item b. acima omitimos as flechas. Isso é bastante comum em livros mais avançados e a locução "Por outro lado" no último parágrafo da demonstração é bastante usada para alertar que neste ponto inicia a prova da implicação contrária.*

5.5.1 Exercícios

1. Qual das seguintes afirmações são verdadeiras? Justifique sua resposta em cada caso.
   (a) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são relações reflexivas sobre A, então $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ e $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ são reflexivas.
   (b) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são relações simétricas em A, então $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ e $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ são simétricas.
   (c) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são relações transitivas em A, então $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ e $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ são transitivas.

2. Seja $\mathcal{R}$ uma relação reflexiva, simétrica e transitiva sobre A. Verifique se relação complementar $\mathcal{R}^c$ possui alguma dessas três propriedades.

3. Demonstrar os itens a. e c. do teorema 5.12.

4. Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Defina (explicitamente escrevendo o conjunto de pares ordenados) uma relação em que A que seja:
   (a) reflexiva, não simétrica, não transitiva;
   (b) não reflexiva, simétrica, não transitiva;
   (c) não reflexiva, não simétrica, transitiva;
   (d) não reflexiva, simétrica, transitiva;
   (e) reflexiva, não simétrica, transitiva;
   (f) reflexiva, simétrica, não transitiva;
   (g) não reflexiva, não simétrica, não transitiva;
   (h) reflexiva, simétrica, transitiva.

5. Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Liste todas as relações de equivalência definidas sobre A.

6. Liste todas as relações de equivalência sobre um conjunto A de 4 elementos.

7. Verifique se as relações abaixo satisfazem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. (demonstrando ou dando contraexemplos).

   (a) $\mathcal{R}$ em $\mathbb{N}$ definida por: $m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m > n$;

   (b) $\mathcal{R}$ em $\mathbb{Z}$ definida por: $m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m + n$ é par;

   (c) $\mathcal{R}$ em $\mathbb{Z}$ definida por: $m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m - n$ é ímpar;

   (d) $\mathcal{E}$ em $\mathbb{R}$ definida por: $y\mathcal{E}x \Leftrightarrow y = e^x$;

   (e) $\mathcal{P}$ em $\mathbb{R}$ definida por: $y\mathcal{P}x \Leftrightarrow y \cdot x > 0$;

   (f) $\mathcal{R}$ em $\mathbb{N}$ definida por: $A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow A \cap B \neq \varnothing$

   (g) $\mathcal{F}$ em $\mathbb{R}$ definida por: $x\mathcal{F}y \Longleftrightarrow 2x + y \geqslant 0$.

Capítulo 6

Relações de Equivalência e de ordem

6.1 Relação de Equivalência

Dizemos que a relação $\mathcal{R}$ é de equivalência quando $\mathcal{R}$ for uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

O caso mais óbvio de relação de equivalência é a igualdade em um conjunto numérico. Por exemplo, a igualdade no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

i. é reflexiva: $\forall x \in \mathbb{R},\ x = x$;

ii. é simétrica: $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x = y \Rightarrow y = x$;

iii. é transitiva: $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x = y$ e $y = z \Rightarrow x = z$;

Guarde esse exemplo como modelo de relação de equivalência e sempre que precisar lembrar o que é uma relação de equivalência, basta lembrar das "boas propriedades" que a igualdade possui.

Exemplo 6.1. Cada uma das relações abaixo é uma relação de equivalência (verifique cuidadosamente cada uma delas).

a. A relação $p\mathcal{R}q \iff |p| = |q|$ definida em $\mathbb{R}$.

b. A relação $(x, y)\mathcal{R}(a, b) \iff x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, definida em $\mathbb{R}^2$;

c. A relação $(x, y)\mathcal{S}(a, b) \iff y - x = b - a$, definida em $\mathbb{R}^2$;

d. A relação de semelhança e a relação de congruência de triângulos estudadas em Geometria Euclideana.

Exemplo 6.2. Considere agora a seguinte relação definida em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$:

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Vamos mostrar que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

1. $\mathcal{R}$ é reflexiva, pois $(a, b)\mathcal{R}(a, b), \forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$;

2. $\mathcal{R}$ é simétrica. De fato, dados $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tais que $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$, temos $a \cdot d = b \cdot c \Rightarrow c \cdot b = d \cdot a$, e portanto $(c, d)\mathcal{R}(a, b)$

3. $\mathcal{R}$ é transitiva, pois dados $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ tais que $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ e $(c,d)\mathcal{R}(e,f)$, temos
$$a\cdot d = b\cdot c \quad \text{e} \quad c\cdot f = d\cdot e. \tag{6.1}$$
Multiplicando a primeira identidade acima por f (note que $f \neq 0$) teremos
$$a\cdot d\cdot f = b\cdot c\cdot f \tag{6.2}$$
Levando a segunda identidade de (6.1) em (6.2) temos
$$a\cdot d\cdot f = b\cdot(c\cdot f) = b\cdot(d\cdot e) \tag{6.3}$$
Como $d \neq 0$ então $a\cdot f = b\cdot e \;\Rightarrow\; (a,b)\mathcal{R}(e,f)$.

Este exemplo acima tem um papel fundamental na Matemática. Para entender um pouquinho a importância desse exemplo, basta lembrar que, dados dois números racionais $a/b, c/d \in \mathbb{Q}$ temos
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;\Leftrightarrow\; a\cdot d = b\cdot c$$

Exemplo 6.3. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, diremos que a é congruente a b módulo 2, e denotaremos isso por $a \equiv b(\text{mod } 2)$, se a diferença $a - b$ for par, ou seja,
$$a \equiv b(\text{mod } 2) \;\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{Z}, a - b = 2k.$$

Essa relação é de equivalência. De fato:

i. para cada $a \in \mathbb{Z}$, temos $a - a = 0 = 2.0$, logo $a \equiv a(\text{mod } 2)$ e a relação é reflexiva;

ii. se $a, b \in \mathbb{Z}$ são tais que $a \equiv b(\text{mod } 2)$, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = 2k \Rightarrow b - a = 2(-k)$, logo $b \equiv a(\text{mod } 2)$.

iii. se $a, b, c \in \mathbb{Z}$ são tais que $a \equiv b(\text{mod } 2)$ e $b \equiv c(\text{mod } 2)$ então existem $k', k'' \in \mathbb{Z}$ tais que $b - a = 2k'$ e $c - b = 2k''$. Adicionando estas duas identidades, teremos
$$c - a = (c - b) + (b - a) = 2k' + 2k'' = 2(k' + k''),$$
ou seja, $c - a = 2k$, com $k = k' + k'' \in \mathbb{Z}$. O que nos dá $a \equiv c(\text{mod } 2)$.

Observação: No exemplo acima poderíamos trocar o número 2 por 3 em cada uma das passagens acima e automaticamente teríamos a prova que a relação $\equiv$ (mod 3), chamada de congruência módulo 3, é uma relação de equivalência. Na verdade, é possível trocar este 2 por qualquer outro número inteiro $m \neq 0$ e repetir a prova acima passo a passo. Entretanto costuma-se considerar apenas o caso em que $m > 0$.

Definição 6.4. *Seja m um número inteiro positivo fixado. $a, b \in \mathbb{Z}$, diremos que a é congruente a b módulo m, e denotaremos isso por $a \equiv b(\text{mod } m)$, se a diferença $a - b$ for múltiplo de m, ou seja,*
$$a \equiv b(\text{mod } m) \;\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{Z}, a - b = m\cdot k.$$

Teorema 6.5. *Para cada $m \in \mathbb{Z}_+^*$ fixado, a relação $\equiv$ (mod m) é de equivalência em $\mathbb{Z}$.*

A demonstração deste teorema segue os mesmos passos do exemplo anterior e deixamos como exercício.

6.1.1 Exercícios

1. Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Liste todas as relações de equivalência definidas sobre A.

2. Liste todas as relações de equivalência sobre um conjunto A de 4 elementos.

3. Seja $\mathcal{R}$ a relação definida em $\mathbb{R}$ sa seguinte forma:

$$z\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

   Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{R}$.

4. Seja A um conjunto não vazio e $F \subset A$ um conjunto fixado. Vamos definir duas relações em $\mathcal{P}(A)$ da seguinte forma: dados $X, Y \subset A$,

   i. $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X \cap F = Y \cap F$;
   ii. $X\mathcal{S}Y \Leftrightarrow X \cup F = Y \cup F$;

   Prove que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são relações de equivalência em $\mathcal{P}(A)$.

5. Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ relações de equivalência sobre um conjunto A não vazio. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Provando ou dando contra-exemplo.

   (a) $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ é uma relação de equivalência;
   (b) $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ é uma relação de equivalência;
   (c) $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ é uma relação de equivalência;
   (d) $\mathcal{R}^{-1}$ é uma relação de equivalência;

6. Sejam $\mathcal{R}_A$ e $\mathcal{R}_B$ relações de equivalência sobre os conjunto A e B não vazios respectivamente. Defina uma relação em $A \times B$ da seguinte forma:

$$(a, b)\mathcal{R}(x, y) \ \Leftrightarrow a \ \mathcal{R}_A \ x \ \text{ e } \ b \ \mathcal{R}_B \ y.$$

   Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em $A \times B$.

6.2 Classes de Equivalência e Conjunto Quociente

Retornemos agora a relação de equivalência $\equiv$ (mod 2) definida no último exemplo da seção anterior. Uma pergunta natural que surge aqui é a seguinte:

"Fixado $a \in \mathbb{Z}$, quais elementos de $\mathbb{Z}$ estão relacionados a este a?"

Por exemplo:

1. para $a = 0$ fixado, temos $x \equiv 0 \pmod 2 \Leftrightarrow \ x - 0$ é par $\Leftrightarrow x$ é par; e

2. para $a = 1$ fixado, temos $x \equiv 1 \pmod 2 \Leftrightarrow \ x - 1$ é par $\Leftrightarrow x$ é ímpar.

O conjunto de todos os números inteiros equivalentes a 0 é chamado de "classe de equivalência"do 0 com respeito a relação $\equiv$ (mod 2), a qual denotaremos assim:

$$[0]_{\equiv (\text{mod } 2)} = \{x \in \mathbb{Z}, x \text{ é par }\} \text{ e } [1]_{\equiv (\text{mod } 2)} = \{x \in \mathbb{Z}, x \text{ é ímpar }\}$$

Também consideraremos o conjunto

$$\mathbb{Z}/_{\equiv (\text{mod } 2)} = \left\{[0]_{\equiv (\text{mod } 2)}, [1]_{\equiv (\text{mod } 2)}\right\},$$

chamado de quociente de $\mathbb{Z}$ pela relação de equivalência $\equiv$ (mod 2).

Definição 6.6. *Seja $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência em um conjunto $A \neq \varnothing$.*

i. A classe de equivalência de um elemento $a \in A$, com respeito e relação $\mathcal{R}$, é o conjunto de todos os elementos de A que estão relacionados com a, e será denotado por $[a]_{\mathcal{R}}$. Assim

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A;\ x\mathcal{R}a\}.$$

ii. O quociente do conjunto A pela relação de equivalência $\mathcal{R}$ é a família de subconjuntos

$$A/_{\mathcal{R}} \doteq \{[a]_{\mathcal{R}}; a \in A\}$$

Exemplo 6.7. Considere agora a seguinte relação no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y)\mathcal{S}(a, b) \ \Leftrightarrow \ x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

Claramente $\mathcal{S}$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{R}^2$.

Vamos caracterizar geometricamente as classes de equivalência de alguns elementos de $\mathbb{R}^2$ e descrever o conjunto quociente de $\mathbb{R}^2$ por esta relação de equivalência:

a. $[(1, 0)]_{\mathcal{S}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y)\mathcal{S}(1, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1^2 + 0^2\}$, ou seja,

$$[(1, 0)]_{\mathcal{S}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\};$$

b. $[(0, -1)]_{\mathcal{S}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y)\mathcal{S}(0, -1)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$, assim

$$[(0, -1)]_{\mathcal{S}} = [(1, 0)]_{\mathcal{S}};$$

Na verdade $[(a, b)]_{\mathcal{S}} = [(1, 0)]_{\mathcal{S}}$, qualquer que seja o ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ com $a^2 + b^2 = 1$;

c. $[(3, 4)]_{\mathcal{S}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y)\mathcal{S}(3, 4)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 25\}$. Também temos

$$[(3, 4)]_{\mathcal{S}} = [(3, -4)]_{\mathcal{S}} = [(5, 0)]_{\mathcal{S}} = [(-1, 2\sqrt{6})]_{\mathcal{S}} = ...$$

d. $[(0, 0)]_{\mathcal{S}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y)\mathcal{S}(0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 0\} = \{(0, 0)\}$.

Geometricamente, para cada ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ fixado, a classe de equivalência $[(a, b)]_{\mathcal{S}}$ pode ser interpretada como sendo o círculo de centro na origem e raio $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Deste modo, o quociente $\mathbb{R}^2/\mathcal{S}$ pode ser visto como a família de todos os círculos de centro na origem do plano cartesiano;

Note que

1. Para cada par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}$ fixado, a classe de equivalência $[(a, b)]_{\mathcal{S}}$ contém pelo menos o ponto (a, b).

2. Dois pares ordenados estão relacionados se e somente se estão sobre o mesmo círculo centrado na origem, ou seja, na mesma classe de equivalência.

3. Quando dois pares ordenados não estão relacionados então suas classes de equivalência são discos centrados na origem de raios diferentes, em particular, essas classes não se intersectam.

Essas três observações valem, essencialmente. para qualquer relação de equivalência. O próximo teorema fala exatamente disso.

Teorema 6.8. *Seja $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência em um conjunto A não vazio e $a, b \in A$ elementos quaisquer. Então:*

i. $[a]_{\mathcal{R}} \neq \varnothing$;

ii. $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} = \varnothing \Leftrightarrow a \not{\mathcal{R}} b$;

iii. $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow a\mathcal{R}b$.

Demonstração. Para provar *i.*, basta lembrar que a relação $\mathcal{R}$ é reflexiva, ou seja, $a\mathcal{R}a$, para todo $a \in A$, ou seja, $a \in [a]_{\mathcal{R}} \Rightarrow [a]_{\mathcal{R}} \neq \varnothing, \forall a \in A$.

Em *ii.*, vamos provar que $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \varnothing \Leftrightarrow a\mathcal{R}b$. Por um lado, $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a \in [b]_{\mathcal{R}}$ e acabamos de mostrar acima que $a \in [a]_{\mathcal{R}}$. Portanto $a \in [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \Rightarrow [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \varnothing$.

Por outro lado, partindo da hipótese que $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \neq \varnothing$, podemos concluir que existe um $x \in A$ tal que $x \in [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}}$, logo $x \in [a]_{\mathcal{R}}$ e $x \in [b]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow x\mathcal{R}a$ e $x\mathcal{R}b$. Como a relação é simétrica temos $a\mathcal{R}x$ e $x\mathcal{R}b$ e por transitividade concluímos que $a\mathcal{R}b$.

Finalmente, em *iii.*, a suficiência é obvia, pois $a \in [a]_{\mathcal{R}}$ e $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$, logo $a \in [b]_{\mathcal{R}}$ e portanto $a\mathcal{R}b$.

Para a necessidade, vamos provar que $[a]_{\mathcal{R}} \subset [b]_{\mathcal{R}}$ e que $[a]_{\mathcal{R}} \supset [b]_{\mathcal{R}}$. Seja $x \in [a]_{\mathcal{R}}$, pela definição de classe de equivalência temos $x\mathcal{R}a$. Mas, por hipótese, $a\mathcal{R}b$. Logo por transitividade temos $x\mathcal{R}b$ e portanto $x \in [b]_{\mathcal{R}}$. Com isso mostramos que $[a]_{\mathcal{R}} \subset [b]_{\mathcal{R}}$. A prova da outra inclusão segue as mesmas ideias e vamos deixá-la como exercício para o leitor. □

6.2.1 Exercícios

1. Defina uma relação $\mathcal{R}$ em $\mathbb{N}^2$ por $(a, b)\mathcal{R}(p, q) \Leftrightarrow a + q = b + p$.
   (a) Prove que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{N}^2$;
   (b) Calcular as classes de equivalência $[(1, 1)]_{\mathcal{R}}, [(1, 2)]_{\mathcal{R}}$ e $[(2, 1)]_{\mathcal{R}}$;
   (c) Descreva os conjunto $[(p, q)]_{\mathcal{R}}$, para qualquer par $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
2. Para $(x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2$, defina a relação $(x, y)\mathcal{R}(a, b) \Leftrightarrow x^2 + y = a^2 + b$.
   (a) Prove que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{R}^2$;
   (b) Calcule as classes de equivalência $[(0, 0)]_{\mathcal{R}}, ([0, 1)]_{\mathcal{R}}, [(-1, 0)]_{\mathcal{R}}$ e $[(0, -2)]_{\mathcal{R}}$;
   (c) Dê uma descrição geométrica do conjunto quociente $\mathbb{R}^2/_{\mathcal{R}}$.

6.3 Partições

Outra característica marcante das classes de equivalência, é que ela divide o conjunto inicial em várias partes disjuntas. Reunindo todas essas partes, recuperamos o conjunto inicial.

Por exemplo, na relação $\equiv \pmod 2$ (apresentada no exemplo 6.3 e no inicio da seçao anterior) vimos que

$$[0]_{\equiv \pmod 2} = \{x \in \mathbb{Z}, x \text{ é par }\} \text{ e } [1]_{\equiv \pmod 2} = \{x \in \mathbb{Z}, x \text{ é ímpar }\}$$

Note que

1. $[0]_{\equiv \pmod 2} \neq \varnothing$ e $[1]_{\equiv \pmod 2} \neq \varnothing$;
2. $[0]_{\equiv \pmod 2} \cap [1]_{\equiv \pmod 2} = \varnothing$; e

3. $[0]_{\equiv(\text{mod } 2)} \cup [1]_{\equiv(\text{mod } 2)} = \mathbb{Z}$.

Essas três propriedades juntas nos dizem que o conjunto dos números inteiros foi "repartido" em dois pedaços disjuntos. Em matemática, dizemos que o conjunto quociente

$$\mathbb{Z}/_{\equiv(\text{mod } 2)} = \left\{[0]_{\equiv(\text{mod } 2)}, [1]_{\equiv(\text{mod } 2)}\right\},$$

é uma partição de $\mathbb{Z}$. Vamos definir isso precisamente.

Definição 6.9. *Seja A um conjunto não vazio e $\mathcal{P}$ uma família de subconjuntos de A. Diremos que $\mathcal{P}$ é uma partição de A se as seguintes propriedades forem satisfeitas:*

1. $\forall X \in \mathbb{P}, X \neq \varnothing$;

2. $\forall X, Y \in \mathbb{P}, X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \varnothing$;

3. $\bigcup_{X \in \mathcal{P}} X = A$.

Exemplo 6.10. Considere a relação $\mathcal{S}$ definida no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ por

$$(x, y)\mathcal{S}(a, b) \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

Essa relação é claramente uma relação de equivalência em $\mathbb{R}^2$ e, no exemplo 6.7 verificamos que, para cada ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixado, a classe de equivalência $[(a, b)]_{\mathcal{S}}$ pode ser interpretada geometricamente como sendo o círculo de centro na origem e raio $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Logo o conjunto quociente $\mathbb{R}^2/\mathcal{S}$ é a família de todos os círculos de centro na origem do plano cartesiano. Verifique que a família $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2/\mathcal{S}$ é uma partição de $\mathbb{R}^2$

Teorema 6.11. *Se $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A, então o quociente $A/_{\mathcal{R}}$ é uma partição de A.*

Demonstração. Seja $A/_{\mathcal{R}} = \{[a]_{\mathcal{R}}; a \in A\}$ o conjunto quociente de A pela relação de equivalência $\mathcal{R}$. Pelo teorema 6.8, temos

i. $[a]_{\mathcal{R}} \neq \varnothing$;

ii. $[a]_{\mathcal{R}} \neq [b]_{\mathcal{R}} \Rightarrow a \not{\mathcal{R}} b \Rightarrow [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} = \varnothing$;

Falta apenas verificar que

$$\bigcup_{[a]_{\mathcal{R}} \in A/_{\mathcal{R}}} [a]_{\mathcal{R}} = A.$$

Mas cada classe $[a]_{\mathcal{R}} \subset A$, logo $\bigcup_{[a]_{\mathcal{R}} \in A/_{\mathcal{R}}} [a]_{\mathcal{R}} \subset A$. Por outro lado, temos $a \in [a]_{\mathcal{R}}, \forall a \in A$, logo $\{a\} \subset A$ e

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\} \subset \bigcup_{a \in A} [a]_{\mathcal{R}} \;=\; \bigcup_{[a]_{\mathcal{R}} \in A/_{\mathcal{R}}} [a]_{\mathcal{R}}.$$

□

A seguir vamos provar que a recíproca do teorema acima é verdadeira. Ou seja, dada uma partição de um conjunto, podemos sempre definir uma relação de equivalência, cujas classes de equivalência sejam justamente os elementos da partição inicial.

Definição 6.12. *Seja A um conjunto não vazio e $\mathcal{P}$ uma partição de A. Definimos uma relação $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ em A da seguinte forma:*

$$\forall a, b \in A, \ \ a\mathcal{R}_{\mathcal{P}}b \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{P}, a, b \in X.$$

Ou seja, dois elementos de A estão relacionados se ambos estiverem em um mesmo subconjunto da partição.

Teorema 6.13. *A relação $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ definida acima é uma relação de equivalência em A.*

Demonstração. Precisamos verificar que $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

1. Como $\mathcal{P}$ é uma partição de A então $\bigcup_{X\in\mathcal{P}} X = A$. Logo, para cada $a \in A$, existe um conjunto $X \in \mathcal{P}$ tal que $a \in X$, e isso garante que $a\, \mathcal{R}_{\mathcal{P}}\, a$

2. Sejam $a, b \in A$ tais que $a\, \mathcal{R}_{\mathcal{P}}\, b$, então existe um conjunto $X \in \mathcal{P}$ tal que $a, b \in X$. Isso garante que $b, a \in X$ e portanto $b\, \mathcal{R}_{\mathcal{P}}\, a$.

3. Sejam $a, b, c \in A$ tais que $a\, \mathcal{R}_{\mathcal{P}}\, b$ e $b\, \mathcal{R}_{\mathcal{P}}\, c$.. então existem $X, Y \in \mathcal{P}$ tais que $a, b \in X$ e $b, c \in Y$. Como $b \in X \cap Y$, pela contrapositiva do item *ii*. da definição de partição temos $X = Y$. Logo $a, c \in X$, ou seja $a\, \mathcal{R}_{\mathcal{P}}\, c$.

□

Teorema 6.14. *Seja A um conjunto não vazio, $\mathcal{P}$ uma partição de A e $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ a relação de equivalência definida pela partição $\mathcal{P}$ em A. Então*

$$A/_{\mathcal{R}_{\mathcal{P}}} = \mathcal{P}.$$

Em outras palavras, as classes de equivalência da relação $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ são exatamente os elementos da partição $\mathcal{P}$.

A prova deste teorema consiste em observar que fixado um elemento $a \in A$, dizer que um elemento x está $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}-$relacionado com a significa que existe um conjunto $X_a \in \mathcal{P}$ contendo a e x ao mesmo tempo. Como os conjuntos que compõe a partição são dois-a-dois disjuntos, então os únicos elementos relacionados com o a fixado, são exatamente os elementos de X_a. Portanto $[a]_{\mathcal{R}_{\mathcal{P}}} = X_a$.

Exemplo 6.15. Considere a partição $\mathcal{P} = \{\mathbb{R}^*_-, \{0\}, \mathbb{R}^*_+\}$ de $\mathbb{R}$. A relação de equivalência gerada por esta partição é dada por:

$$a\, \mathcal{R}_{\mathcal{P}}\, b \ \Leftrightarrow \ a, b \in \mathbb{R}^*_- \text{ ou } a, b \in \mathbb{R}^*_+ \text{ ou } a = b = 0.$$

A qual pode ser reescrita nos seguintes termos

$$a\, \mathcal{R}_{\mathcal{P}}\, b \ \Leftrightarrow \ a \cdot b > 0 \ \text{ ou } \ a = b = 0.$$

Note que:

▷ se $a > 0$ então $[a]_{\mathcal{R}_{\mathcal{P}}} = \mathbb{R}^*_+$;
▷ se $a < 0$ então $[a]_{\mathcal{R}_{\mathcal{P}}} = \mathbb{R}^*_-$; e
▷ $[0]_{\mathcal{R}_{\mathcal{P}}} = \{0\}$.

6.3.1 Exercícios

6.4 Relações de Ordem

Outro tipo importante de relação dentro da matemática são as relações de ordem, por exemplo, a relação $\leqslant$ no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

Para caracterizar as relações de ordem, precisamos antes falar da propriedade antissimétrica.

Definição 6.16. *Dizemos que uma relação $\mathcal{R}$ em A é antissimétrica se, para todo $a, b \in A$,*

$$a\mathcal{R}b \text{ e } b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b.$$

Exemplo 6.17.

1. A relação “ $\leqslant$″ no conjunto dos números reais é antissimétrica.
   De fato, dados $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a \leqslant b$ e $b \leqslant a$, teremos $a = b$.

2. Fixado um conjunto A, a relação “estar contido” é uma relação antissimétrica no conjunto $\mathcal{P}(A)$ das partes de A.
   Com efeito, se $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ são tais que $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.

Definição 6.18. *Dizemos que uma relação $\mathcal{R}$ em A é uma relação de ordem se $\mathcal{R}$ for reflexiva, transitiva e antissimétrica.*

Obviamente as relações “ $\leqslant$″ no conjunto dos números reais e a relação “estar contido” no conjunto das partes de um conjunto A são exemplos de relações de equivalência. Vamos analisar um exemplo mais interessante e não tão comum (do ponto de vista de relações de ordem).

Exemplo 6.19. Considere a seguinte relação no conjunto dos números naturais. Dados $a, b \in \mathbb{N}$

$$a|b \;\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}; b = k \cdot a.$$

Quando $a|b$, dizemos que a divide b.

Como exemplo, note que $3|15$, pois $15 = 5 \cdot 3$, e $8|160$, pois $160 = 20 \cdot 8$. Porém $4 \not| 10$. De fato, $10 \neq k \cdot 4$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

1. Como $a = 1 \cdot a$, para todo natural a, então $a|a, \forall a \in \mathbb{N}$;

2. Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$ tais que $a|b$ e $b|c$. Logo existem $k, k' \in \mathbb{N}$ tais que $b = k \cdot a$ e $c = k\text{“}' \cdot b$.
   Daqui temos
   $$c = k' \cdot b = k' \cdot (k \cdot a) = (k \cdot k') \cdot a,$$
   ou seja, $c = (k \cdot k') \cdot a \Rightarrow a|c$.

3. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $a|b$ e $b|a$. Então existem $k, k' \in \mathbb{N}$ tais que $b = k \cdot a$ e $a = k\text{“}' \cdot b$.
   Daqui temos
   $$a = k' \cdot b = k' \cdot (k \cdot a) = (k \cdot k') \cdot a,$$
   ou seja, $a = (k \cdot k') \cdot a \Rightarrow k \cdot k' = 1$. Como k e k' são naturais, temos $k = k' = 1$, e portanto $a = b$.

Definição 6.20. *Seja $\mathcal{R}$ uma relação de ordem definida em um conjunto não vazio A. Dados dois elementos $a, b \in A$ quaisquer, diremos que a e b são comparáveis pela ordem $\mathcal{R}$ se e somente se $a\mathcal{R}b$ ou $b\mathcal{R}a$. Caso ocorra $a \not\mathcal{R} b$ e $b \not\mathcal{R} a$, diremos que a e b não são comparáveis.*

Exemplo 6.21. Os números naturais 2 e 3 são comparáveis pela ordem "$\leqslant$", pois $2 \leqslant 5$. Mas estes mesmos dois números não são comparáveis pela relação de ordem $a|b$, pois $2 \not| 3$ e $3 \not| 2$. Este esxemplo simples mostra que elementos de um mesmo conjunto podem ser comparáveis por uma ordem e não ser comparáveis por outra.

Definição 6.22. *Seja $\mathcal{R}$ uma relação de ordem definida em um conjunto não vazio A. Diremos que:*

1. *$\mathcal{R}$ é uma ordem total em A se dois elementos quaisquer de A são comparáveis segundo $\mathcal{R}$. Neste caso, também dizemos que o A é totalmente ordenado por $\mathcal{R}$.*
2. *$\mathcal{R}$ é uma ordem parcial em A se existirem dois elementos de A que não são comparáveis pela ordem $\mathcal{R}$. Neste caso, também costuma-se dizer que o conjunto A é parcialmente ordenado pela ordem $\mathcal{R}$.*

Exemplo 6.23. Vamos analisar a relação de ordem "estar contido em" em duas situações diferentes:

i. Em $\mathcal{P}(\{0,1\})$ a relação "estar contido em" é uma ordem parcial, pois $\{0\} \not\subset \{1\}$ e $\{1\} \not\subset \{0\}$;

ii. Em $\mathcal{P}(\{0\})$ a relação "estar contido em" é uma ordem total, pois $\mathcal{P}(\{0\}) = \{\varnothing, \{0\}\}$ e $\varnothing \subset \{0\}$.

Portanto o fato de uma ordem ser total ou parcial pode depender tanto do conjunto quanto da forma como ela foi definida.

Observação: Você já deve ter notado que a relação "$<$" (menor que) não se encaixa na definição de ordem que demos acima. Pois ela não satisfaz duas propriedades da relação de ordem (reflexividade e antissimetria). Como essa também é uma relação importantíssima dentro da matemática, merece um lugar especial dentro da teoria de relações. Esse tipo de relação é chamado de ordem estrita. Mais precisamente.

Dizemos que a relação $\mathcal{R}$ definida em $A \neq \varnothing$ é uma ordem estrita se $\mathcal{R}$ é transitiva e irreflexiva (que significa o seguinte: $\forall x \in A,\ x \not{\mathcal{R}} x$).

Note que a relação "$<$" (menor que) em $\mathbb{R}$ satisfaz essas duas condições. Assim, a expressão $x < y$ pode ser lida como: x é estritamente menor que y.

Observação: As relação de ordem são mais comum, e tem mais significado e aplicações, em conjuntos numéricos. Logo a notação mais usada é $x \leqslant y$ e $x \geqslant y$ em vez de $x\mathcal{R}y$ e $x\mathcal{R}^{-1}y$.

Mes, mesmo em outros conjuntos, envolvendo funções, funcionais e outros objetos, é bastante comum usar a notação $\leqslant$ ou variações dela, tais como:

i. $a \preceq b$, lida como: a precede b ou a precede ou é igual a b;

ii. $x \succeq y$, lida como: x sucede y ou x sucede ou é igual a y;

iii. $a \prec b$, lida como: a estritamente precede b;

iv. $x \succ y$, lida como: x estritamente sucede y.

Observação: A teoria de conjuntos ordenados é muito rica e profunda. É possível introduzir novos conceitos bastante intuitivos como: intervalos, elementos mínimos e máximos, minorantes e majorantes, conjuntos bem ordenados, elementos consecutivos, princípio de indução, filtros, reticulados etc. São conceitos que generalizam ideias bastante simples da matemática e nos mostram que o únicos limites da matemática são a inventividade e a curiosidade de cada um em seguir em frente.

6.4.1 Exercícios

1. Seja A um conjunto qualquer e considere a relação de inclusão $\subset$ sobre $\mathcal{P}(A)$.
   (a) Mostre que essa relação é uma relação de ordem em $\mathcal{P}(A)$;
   (b) Prove que, se $A \neq \varnothing$ então essa ordem não é total.
2. Mostre que a relação: $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Z}_+;\ b = a + r$ é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{Z}$.
3. Seja $\mathcal{R}$ uma relação de ordem em A. Mostre que a relação inversa $\mathcal{R}^{-1}$ também é uma relação de ordem.
4. Seja $A = \{2^n; n \in \mathbb{N}\}$. Mostre que a relação $a|b$ é uma ordem total em A.
5. Podemos usar a ordem de $\mathbb{R}$ para construir uma ordem no conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos (os números da forma $a + bi$, sendo $i^2 = -1$). A *ordem lexicográfica* sobre $\mathbb{C}$ é definida da seguinte forma

$$a + bi \preceq c + di \Leftrightarrow a < c \text{ ou } a = c \text{ e } b \leq d.$$

   (a) Mostre que $\preceq$ é uma relação de ordem em $\mathbb{C}$.
   (b) Mostre que $0 \preceq i$.
   (c) Seja a um é número real positivo, z e w números complexos. Mostre que

$$z \preceq w \Rightarrow az \preceq aw.$$

   (d) Dê um contraexemplo para mostrar que a ordem lexicográfica não satisfaz a seguinte propriedade (que é válida nos reais):
   "se $z \preceq w$ e $0 \preceq t$, então $tz \preceq tw$"

   Sugestão: compare i e $-i$. Qual deles precede o outro?
   A seguir multiplique a desigualdade obtida por um complexo apropriado.

Capítulo 7

Funções

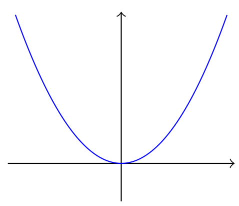
O conceito de função é um das noções mais fundamentais da Matemática e geralmente á apresentado às pessoas de uma forma intuitiva, algo como: *uma função de A em B é uma regra que associa a cada elemento de A um único elemento do conjunto B.*

O maior problema nesse modo de apresentar o conceito de função é estabelecer precisamente o que se entende por "uma regra". Uma forma honesta de evitar esse problema é usar a linguagem de conjuntos e relações que desenvolvemos até aqui para definir precisamente o conceito de função.

7.1 Definição precisa de função

Vamos começar analisando um exemplo bem conhecido de função: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ (a "regra" aqui é associar a cada número real x o seu quadrado).

Uma forma natural de entender o comportamento de uma função é olhar para seu gráfico, ou seja, considerar o conjunto de pontos de (x, y) do plano cartesiano tais que $y = x^2$



$$\text{Gráfico}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2\}$$

Este exemplo sugere que o gráfico da função $f : A \to B$ pode ser visto como uma relação em $A \times B$. Temos apenas que tomar o cuidado de exigir que cada elemento do dominio tenha uma imagem e que essa imagem seja única. Mais precisamente:

Definição 7.1. *Sejam A e B dois conjuntos não vazios e $f \subset A \times B$ uma relação. Dizemos que f é uma função se:*

i. $Dom(f) = A$; e

ii. Se $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$ então $y = z$.

Costuma-se dizer que a condição *i.* é uma condição de EXISTÊNCIA, pois garante que, para cada elemento $x \in A$, existe um $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. E a condição *ii.* é uma condição de UNICIDADE, pois garante que este $y \in B$ é único.

Neste ponto parece natural querer condensar as duas condições acima em uma só, escrevendo algo como $\forall x \in A, \exists!\ y \in B; (x, y) \in f$. Porém, as técnicas para provar a existência e as técnicas para provar a unicidade são tão distintas, que o ideal é manter a definição em duas partes. Isso ficará claro nos resultados que veremos adiante.

Exemplo 7.2. *Dados A e B não vazios e um elemento $b \in B$, considere a relação*

$$C_b = \{(x, y); x \in A \text{ e } y = b\}.$$

Note que

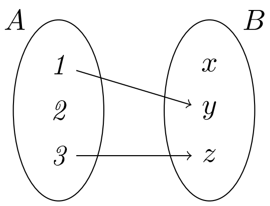
1. *C_b é uma relação de A em B, ou seja, $C_b \subset A \times B$;*

2. *Para todo $x \in A$ temos $(x, b) \in C_b$, ou seja, $Dom(C_b) = A$;*

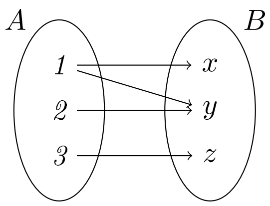
3. *Se $(x, y) \in C_b$ e $(x, z) \in C_b$ então $y = b$ e $z = b$, ou seja, $y = z$.*

Portanto C_b é uma função.

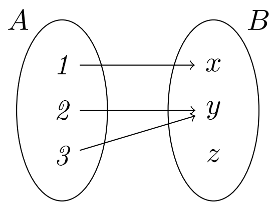
Exemplo 7.3. *Sejam $A = \{1, 2, 3\}, B = \{x, y, z\}$ e considere as relações abaixo dadas pelos seus diagramas sagitais:*



relação $\mathcal{R}_1$



relação $\mathcal{R}_2$



relação $\mathcal{R}_3$

Note que

- *$\mathcal{R}_1$ não é função, pois $Dom(\mathcal{R}_1) = \{1, 3\} \neq A$;*
- *$\mathcal{R}_2$ não é função, pois $Dom(\mathcal{R}_2) = A$, porém $(1, x) \in \mathcal{R}_2$, $(1, y) \in \mathcal{R}_2$ e $x \neq y$.*
- *$\mathcal{R}_3$ é função, pois $Dom(\mathcal{R}_3) = A$ e cada elemento do domínio é levado em um único elemento de B.*

7.1.1 Notação funcional

A definição de função como um tipo especial de relação tem a vantagem de colocar a nossa disposição todo o ferramental e técnicas de demonstração da teoria de conjuntos a serviço do estudo de funções, entretanto essa não é a notação usual em matemática. Por este motivo vamos estabelecer a conexão entre essas duas notações e usar sempre a que for mais conveniente para nossos propósitos.

1. Se $f \subset A \times B$ é uma função, vamos denotá-la $f : A \to B$.
   O conjunto $Dom(f) = A$ é chamado de domínio da função f e $CD(f) = B$ é chamado de contradomínio da função f.

2. Note que: para cada $x \in Dom(f)$ fixado existe um único $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$. Como este y é único a notação $y = f(x)$ faz sentido.
   Chamamos y de "imagem de x pela função f", e x de "pré-imagem" ou "argumento de y para a função f".

3. A notação completa para função usualmente é escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f: \quad & A \to B \\ & x \mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Por economia de espaço, alguns autores preferem escrever tudo em uma linha, como fizemos nestas notas várias vezes, ficando assim: $f : A \to B,\ f(x) = y$. Ou da seguinte forma (ainda mais compacta): $A \ni x \mapsto y = f(x) \in B$.

Para definir precisamente uma função precisamos sempre deixar claro os três elementos principais que a descrevem, a saber: o domínio, o contradomínio e a relação (ou regra) que estabelece a correspondência entre os elementos destes dois conjuntos.

Entretanto, quando estes elementos estão implicitamente claros a partir do contexto, podemos omití-los, para não tornar o texto repetitivo ou sobrecarregado de notações. Neste caso, costuma-se denotar uma função apenas por f, ou podemos apenas declarar a regra que a define.

Por exemplo, em um curso de cálculo de uma variável você pode falar da função $f(x) = 2^x$ ou $g(x) = 1/x$. Naquele contexto, está claro que $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Dom(g) = \mathbb{R} - \{0\}$ e que o contradomínio de ambas as funçoes é o conjunto dos números reais.

No cálculo também é comum nos depararmos com funções definidas por duas (ou mais) regras de correspondência. O exemplo abaixo a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2x + 1, & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Em geral, quando nos deparamos com uma função definida desta forma, a tratamos como a união de duas funções distintas

$f_1 : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ definida por $f_1(x) = 1 - x^2$, para todo $x \leqslant 0$; e

$f_2 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f_2(x) = 2x + 1$, para todo $x \geqslant 0$.

Note que aqui $Dom(f_1) \cap Dom(f_2) = \{0\}$ e que $f_1(0) = f_2(0) = 1$. Este exemplo serve de motivação para o próximo resultado.

Teorema 7.4. *Sejam $f : A \to C$ e $g : B \to D$ duas funções tais que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A \cap B$. Então a união de f e g define uma nova função*

$$h = f \cup g : A \cup B \to C \cup B \ \ \textit{por} \ \ h(x) = \begin{cases} f(x), & \textit{se } x \in A; \\ g(x), & \textit{se } x \in B. \end{cases}$$

Demonstração. Como f e g são relações, com $f \subset A \times C$ e $g \subset B \times D$, então

$$h = f \cup g \subset (A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup B) \times (C \cup D)$$

A última inclusão acima segue do fato que $A \times C$ e $B \times D$ serem subconjuntos de $(A \cup B) \times (C \cup D)$, logo a reunião deles também é subconjunto.

Isso mostra que h é uma relação de $A \cup B$ em $C \cup D$. Falta verificar que essa relação satisfaz às duas condições da definição 7.1.

Claramente $Dom(h) = A \times B$, e para verificar a segunda condição da definição de função, basta analisar os três casos a seguir: 1. $x \in A - B$; 2. $x \in B - A$; e 3. $x \in A \cap B$.

No caso 1., dados $(x, y) \in h$ e $(x, z) \in h$ temos $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$ (pois $x \in A$). Como f é função então $y = z$. O caso 3. é análogo e no caso 2. o raciocínio é o mesmo, pois $f(x) = g(x), \forall x \in A \cap B$. $\square$

Exemplo 7.5 (Função característica). Seja X um conjunto qualquer e $A \subset X$ um subconjunto não vazio. A função característica do conjunto A, geralmente denotada pela letra grega "qui" (com índice A) é definida da seguinte forma:

$$\chi_A : X \to \{0,1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \in X - A \end{cases}$$

7.1.2 Exercícios

1. Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{x, y\}$, quantas funções de A em B existem?
2. Se o conjunto A tem m elementos e o conjunto B tem n elementos, quantas funções de A em B existem?
3. Quantas funções do exercício anterior são funções constante?
4. Seja $f : A \to B$ uma função dada. Demonstre que todo subconjunto g de f dá origem a uma nova função, com $Dom(g) \subset Dom(f)$.
5. Seja $f : A \to B$ uma função. Se a relação $f \subset A \times A$ é uma relação reflexiva em A, mostre que f é a função identidade $Id_A : A \to A$.
6. Se $f : [0,1] \to [0,1]$ é uma função e a relação $f \subset [0,1]^2$ é simétrica, qual é a regra que define f?
7. Encontre a imagem de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$
   (a) $f(x) = 1 - 3x$;
   (b) $g(x) = 3x^2 - 2$;
   (c) $h(x) = 2x^2 + 1$;
   (d) $p(x) = \cos(x\sqrt{3} + 2)$.
8. Escreva a expressão da função característica dos números racionais racionais. Calcule $\chi_{\mathbb{Q}}(1)$, $\chi_{\mathbb{Q}}(0,333\ldots)$, $\chi_{\mathbb{Q}}(\sqrt{6})$, $\chi_{\mathbb{Q}}(2,123123\ldots)$ e $\chi_{\mathbb{Q}}(\sqrt{\pi})$.

7.2 Imagem direta de um conjunto

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 1$. Estamos acostumados a calcular os valores da função f em pontos, por exemplo:

$$f(0) = 2.0 + 1 = 1, \;\; f(-1) = 2.(-1) + 1 = -1, \;\text{ e } f(1) = 2.0 + 1 = 3.$$

Então parece bastante natural a expressão abaixo

$$f(\{0,1,2\}) = \{f(0), f(-1), f(1)\} = \{1, -1, 3\},$$

ou seja, é natural definir a imagem de um conjunto como sendo o conjunto de todas as imagens.

Definição 7.6. *Dada uma função $f : X \to Y$ e um subconjunto $A \subset X$. A imagem direta de A por f é o conjunto de todas as imagens dos elementos de A, ou seja,*

$$f(A) = \{f(x); x \in A\}$$

Observação: Dados $f : X \to Y$, $a \in X$ e $A \subset X$ temos:

i. $f(\{a\}) = \{f(x); x \in \{a\}\} = \{f(x); x = a\} = \{f(a)\}$;

ii. $f(\varnothing) = \{f(x); x \in \varnothing\} = \varnothing$;

iii. $Im(f) = \{f(x); x \in X\} = f(X)$,
ou seja, o conjunto imagem de f é a imagem direta do domínio de f,

iv. $f(A) \subset Y$, logo

$$y \in f(A) \;\Leftrightarrow\; \exists x \in A, f(x) = y.$$

Outra relação fundamental no contexto de imagens diretas é

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in f(A).$$

Exemplo:

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 1$ que definimos no início dessa seção, então:
   (a) $f(\{0\}) = \{f(0)\} = \{1\}$;
   (b) $f(\{n \in \mathbb{N}; 1 \leqslant n \leqslant 10\}) = \{f(n); 1 \leqslant n \leqslant 10\} = \{3, 5, 7, \ldots, 21\}$;
   (c) $f([-1, 2]) = \{f(x); x \in [-1, 2]\} = [-1, 5]$,
   pois $-1 \leqslant x \leqslant 2 \;\Rightarrow\; -2 \leqslant 2x \leqslant 4 \;\Rightarrow\; -1 \leqslant 2x + 1 \leqslant 5$.

2. Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é a função constante $f(x) = 1$, temos $f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{1\}$, qualquer que seja o conjunto $A \subset \mathbb{R}$;

Teorema 7.7. *Sejam $f : X \to Y$ uma função e $A, B \subset X$ subconjuntos do domínio de f. Então*

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B).$$

Demonstração. Seja $y \in f(A)$ um elemento qualquer. Pela definição de imagem direta, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como $x \in A$ e $A \subset B$, então $x \in B \Rightarrow f(x) \in f(B)$. □

O resultado acima pode ser lido da seguinte forma: *a imagem direta preserva a inclusão de conjuntos*. Outras formas de os matemáticos se referirem a resultados como este é dizer que a imagem direta "respeita a inclusão" ou "é compativel com a inclusão de conjuntos".

O próximo resultado mostra que a imagem direta preserva união de conjuntos, mas não é compatível com a interseção de conjuntos.

Teorema 7.8. *Sejam $f : X \to Y$ uma função e $A, B \subset X$. Então*

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;

Além disso, a inclusão contrária no segundo item acima não é válida.

Demonstração. Note que:

1. $y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow \exists x; x \in A \cup B$ e $y = f(x) \Leftrightarrow \exists x; (x \in A$ ou $x \in B)$ e $y = f(x)$
   $\Leftrightarrow \exists x; (x \in A$ e $y = f(x))$ ou $(x \in B$ e $y = f(x))$
   $\Leftrightarrow y \in f(A)$ ou $y \in f(B) \Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$

2. Como $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$, pelo teorema anterior temos $f(A \cap B) \subset f(A)$ e também $f(A \cap B) \subset f(B)$. Logo $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;

Finalmente, para mostrar que não vale a inclusão contrária, basta dar um contra-exemplo. Para isto, considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$, e os conjuntos $A = \{-2\}$ e $B = \{2\}$. Neste caso temos $f(A) = f(B) = \{4\}$ enquanto que $f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing$. □

Teorema 7.9. *Sejam $f : X \to Y$ uma função e $A, B \subset X$. Então $f(A - B) \supset f(A) - f(B)$;*

Demonstração. Se $y \in f(A) - f(B))$ então $y \in f(A)$ e $y \notin f(B))$. Logo existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$ e também temos $x \notin B$, caso contrário teríamos $f(x) \in B$, o que não pode ocorrer.

Desta forma, $x \in A - B$ e $y = f(x)$, ou seja, $y = f(x) \in f(A - B)$. □

Observação: A inclusão contrária no teorema acima pode falhar. Por exemplo, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função constante 1, ou seja, $f(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Tomando $A = \{2, 3\}$ e $B = \{3\}$ temos $f(A) = f(B) = \{1\}$ e $f(A - B) = f(\{2\}) = \{1\}$. Assim

$$f(A - B) = \{1\} \not\subset \varnothing = f(A) - f(B).$$

7.3 Imagem inversa de um conjunto

Uma pergunta que certamente você já precisou responder é a seguinte: "para quais valores de x temos $f(x) = 0$?", ou seja, "quais são os zeros da função?"

Por exemplo, $\text{sen}(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Logo $\{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ é o conjuntos de zeros da função seno.

Mas também faz sentido perguntar: para quais valores de x temos $f(x) = a$, $f(x) \in [a, b]$ ou ainda $f(x) \in B$, sendo B um subconjunto qualquer do contradomínio.

Definição 7.10. *Dada uma função $f : X \to Y$ e um subconjunto $B \subset Y$. A imagem inversa de B por f é o conjunto de todas as pré-imagens de elementos de B, ou seja,*

$$f^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\}$$

Exemplo:

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x + 2$, então:
   (a) $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\} = \{-2/3\}$,
   pois $3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2/3$;
   (b) $f^{-1}(\{[1, 7]\}) = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \in [1, 7]\} = [1, 3]$,
   pois $1 \leqslant f(x) \leqslant 7 \Leftrightarrow 1 \leqslant 3x + 2 \leqslant 7 \Leftrightarrow 1 \leqslant x \leqslant 3$.
   (c) $f^{-1}([-4, +\infty)) = \{x; f(x) \geqslant -4\} = [-2, +\infty)$.
2. Considere agora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, então:
   (a) $g^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}; g(x) = 0\} = \{0\}$;
   (b) $g^{-1}(\{4\}) = \{x \in \mathbb{R}; x^2 = 4\} = \{-2, 2\}$;
   (c) $g^{-1}(\{[1, 4]\}) = \{x \in \mathbb{R}; x^2 \in [1, 4]\} = [1, 2] \cup [-2, -1]$;
   (d) $g^{-1}(\{-1\}) = \{x \in \mathbb{R}; x^2 = -1\} = \varnothing$.
3. Finalmente considere a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \text{sen }(x)$, então:
   (a) $h^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}; \text{sen }(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}; x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$;
   (b) $h^{-1}(\{2\}) = \{x \in \mathbb{R}; \text{sen }(x) = 2\} = \varnothing$.

Observação: Tenha em mente que a imagem inversa $f^{-1}(B)$ é um subconjunto do domínio de $f : X \to Y$, e a equivalência fundamental neste caso é

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

Vamos usar essa relação nos próximos resultados.

Teorema 7.11. *Sejam $f : X \to Y$ uma função e $B_1, B_2 \subset Y$ subconjuntos do domínio de f. Então*

$$B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2).$$

Demonstração. Seja $x \in f^{-1}(B_1)$ um elemento qualquer, então $f(x) \in B_1$. Como $B_1 \subset B_2$, então $f(x) \in B_2$, e portanto $x \in f^{-1}(B_2)$. □

Como no caso da imagem direta, pode referenciar o resultado acima da seguinte forma: *a imagem inversa preserva a inclusão de conjuntos* ou *respeita a inclusão* ou *é compativel com a inclusão de conjuntos'*.

Na verdade, a imagem inversa é "melhor"que a imagem direta, pois preserva união, interseção e diferença de conjuntos.

Teorema 7.12. *Sejam $f : X \to Y$ uma função e $B_1, B_2 \subset Y$. Então*

1. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
2. $f^{-1}(B \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
3. $f^{-1}(B - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$;
4. $f^{-1}(\complement_X B_1) = \complement_Y f^{-1}(B_1)$.

Demonstração. Vamos provar apenas que a imagem inversa preserva a interseção de conjuntos. Os demais itens ficam como exercícios.

Seja $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$, então $f(x) \in B_1 \cap B_2 \Leftrightarrow f(x) \in B_1$ e $f(x) \in B_2$. Daqui segue que $x \in f^{-1}(B_1)$ e $x \in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. □

Os resultados acima podem facilmente ser estendidos para famílias indexadas de conjuntos.

Teorema 7.13. *Seja $f : X \to Y$ uma função e considere a família indexada $\{B_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$ de subconjuntos de Y. Então*

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\Big) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma) \quad e \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\Big) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma).$$

Demonstração. Seja $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right)$, então $f(x) \in f^{-1}\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) \Leftrightarrow \forall\gamma \in \Gamma, f(x) \in B_\gamma$. Daqui segue que, $x \in f^{-1}(B_\gamma), \forall\gamma \in \Gamma \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma)$.

Trocando "$\cap$ por $\cup$" e "$\forall$ por $\exists$" na prova acima, obtém-se a prova da outra identidade. □

Observação: Compare, passo a passo, as demonstrações dos dois teoremas acima. Note que a demonstração feita para dois conjuntos e para uma família indexada de conjuntos é praticamente a mesma. Isso quer dizer que as demonstrações de resultados com famílias são praticamente as mesmas que usaríamos para dois conjuntos (pois 2 conjuntos é um caso particular de uma família com apenas 2 elementos).

7.3.1 Exercícios

1. Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$, encontre:

   (a) $f(\{0\})$ (c) $f(\{-1, 1\})$ (e) $f([0, 2))$ (g) $f(\mathbb{R})$

   (b) $f^{-1}(\{0\})$ (d) $f^{-1}(\{-1, 1\})$ (f) $f^{-1}([0, 2))$ (h) $f^{-1}(\mathbb{R})$

2. Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é impar} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$ Calcule:

(a) $f(\{1,2,3\})$

(b) $f(\{2k+1; k \in \mathbb{N}\})$

(c) $f^{-1}(\{2\})$

(d) $f^{-1}(\{1,2,3\})$

3. Seja $f : X \to Y$ uma função, $A \subset X$ e $B \subset Y$. Mostre que:

   (a) $A \subset f^{-1}(f(A))$

   (b) $f(f^{-1}(B)) \subset B$

   (c) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$

   (d) $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$

   (e) $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$

4. Seja $f : X \to Y$ uma função, $A \subset X$ e $B \subset Y$. Encontre contra-exemplos para as seguintes afirmações

   (a) Se $B \neq \varnothing$ então $f^{-1}(B) = \varnothing$.

   (b) $A = f^{-1}(f(A))$

   (c) $f(f^{-1}(B)) = B$

   (d) $f(X) = Y$

7.4 Funções Injetivas e Sobrejetivas

Um das condições que qualquer função deve cumprir (para ser chamada de função) é que qualquer pré-imagem produz uma única imagem.

Em alguns livros de matemática avançada, em situações muito particulares, é permitido falar funções que assumem mais de uma imagem (funções multivalentes), mas essa terminologia é restrita a fins especializados e sua existência pode ser ignorada aqui, sem prejuízo. Para nossos propósitos (e para praticamente toda a matemática), nenhuma função pode produzir duas imagens diferentes para uma mesma pré-imagem.

Mas muito cuidado! Esta exigência não deve ser confundida com a possibilidade de diferentes pré-imagens produzirem o mesma imagem, lembre da função constante, ou da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$. Para essas duas funções temos $2 \neq -2$ e $f(-2) = f(2)$.

É bastante comum que duas pré-imagens diferentes produzam o mesmo imagem. Se uma função levar pré-imagens diferentes em imagens diferentes, daremos a ela um nome especial: diremos que ela é injetiva, ou injetora ou ainda que essa função é um-a-um ou que é uma injeção.

Definição 7.14. *Dizemos que a função $f : A \to B$ é injetiva se ela associar imagens diferentes a cada par de pré-imagens diferentes. Em símbolos,*

$$f : A \to B \text{ é injetiva } \Leftrightarrow \forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2).$$

Alternativamente, podemos expressar esta condição usando a forma contrapositiva:

$$f : A \to B \text{ é injetiva } \Leftrightarrow \forall a_1, a_2 \in A, f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Observe que uma função ser ou não ser injetiva pode depender também de seu domínio (e não apenas na regra). Por exemplo, A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ não é injetiva, como observamos logo acima, porém a função $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2$ é injetiva!

De fato, se $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ satisfazem $x_1^2 = x_2^2$, então $(x_1^2)^{1/2} = (x_2^2)^{1/2} \Rightarrow |x_1| = |x_2|$ e portanto $x_1 = x_2$, pois $x_1 \geqslant 0$ e $x_2 \geqslant 0$.

Agora, vamos focar nossa atenção no contradomínio, o conjunto B das imagens "possíveis" para uma função $f : A \to B$. Note que o contradomínio é parte integrante de uma função, mas não é exigido que todos os elementos de B sejam imagem de elementos de A, como ocorre novamente com uma função constante e com a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$. Para essa função quadrática, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ teremos $x^2 \neq 1$, ou seja, o valor -1 não faz parte do conjunto imagem de f.

No caso especial em que todos os elementos do contradomínio de uma função pertencem a imagem dessa função, diremos que f é uma função sobrejetiva ou sobrejetora.

Definição 7.15. *Dizemos que a função $f : A \to B$ é sobrejetiva se o seu contradomínio for igual a sua imagem, ou seja, $B = Im(f)$. Em símbolos,*

$$f : A \to B \text{ é sobrejetiva } \Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a \in A; f(a) = b.$$

Observe a ordem dos quantificadores na condição acima. Para cada b em B deve ser possível encontrar um elemento a em A tal que $f(a) = b$.

Retornando ao exemplo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, vimos que f não é sobrejetiva, pois nenhum número real negativo pertence a imagem dessa função. Porém a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definida pela mesma regra $h(x) = x^2$ é sobrejetiva, pois dado qualquer $y \in \mathbb{R}_+$, basta tomar $x = y^{1/2}$ e teremos $f(x) = x^2 = (y^{1/2})^2 = y$.

Dada uma função $f : A \to B$, uma pré-imagem de um elemento $b \in B$, é qualquer elemento $a \in A$ para o qual $f(a) = b$. No exemplo, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definida por $h(x) = x^2$, para cada $y > 0$ temos duas pré imagens: $x_1 = y^{1/2}$ e $x_2 = -y^{1/2}$. Isso nos diz que h é sobrejetiva, porém não é injetiva.

Modificando um pouquinho mais a função $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$, podemos garantir que ela seja simultaneamente injetiva e sobrejetiva. Basta considerar $\ell : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ \ell(x) = x^2$.

Definição 7.16. *Dizemos que a função $f : A \to B$ é bijetiva quando ela for ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva.*

Exemplo 7.17. Considere a função seno $f : R \to [-1, 1]$, dada por $f(x) = \text{sen x}$. Note que f é uma sobrejeção; mas se o contradomínio $[-1; 1]$ for trocado por $\mathbb{R}$, então $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não será sobrejetora. Para que f seja injetora, precisamos também restringir o domínio. Por exemplo, tomando $f : [-\pi, \pi] \to [-1, 1]$ definida por $f(x) = \text{sen x}$, teremos f bijetiva.

Adicionando a hipótese de injetividade podemos melhorar o seguinte resultado visto no Teorema 7.8

Teorema 7.18. *Seja $f : A \to B$ uma funcão qualquer e $A_1, A_2 \subset A$. Se f é injetiva então*

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

Demonstração. No item *ii.* do Teorema 7.8 mostramos que $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. Falta provar apenas a inclusão contrária.

Seja $b \in f(A_1) \cap f(A_2)$, então $b \in f(A_1)$ e $b \in f(A_2)$. Pela definição de imagem direta, existem $a_1 \in A_1$ e $a_2 \in A_2$ tais que $b = f(a_1) \in f(A_1)$ e $b = f(a_2) \in f(A_2)$.

Agora, pela injetividade de f, de $f(a_1) = f(a_2)$ temos $a_1 = a_2$. Como $a_1 \in A_1$ e $a_1 = a_2 \in A_2$ então $a_1 \in A_1 \cap A_2$, o que implica em $y = f(a_1) \in f(A_1 \cap A_2)$. $\square$

7.4.1 Exercícios

1. Verifique se as funções abaixo são injetivas e sobrejetivas, provando ou exibindo um contraexemplo:

   (a) $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z},\ f(n) = \begin{cases} (n-1)/2 & , \ n \text{ ímpar} \\ -n/2 & , \ n \text{ par} \end{cases}$.

   (b) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = xy + x + y$.

   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f(x) = (x, x)$.

   (d) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(m, x) = mx$.

   (e) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ f(x) = x^2$.

   (f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,\ a \neq 0$.

   (g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - (-\infty,\ -1),\ f(x) = x^2 - 1$.

   (h) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x$.

   (i) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x, y) = 3^{x+1}5^{x+1}$.

   (j) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ f(x) = \begin{cases} (m, n) & , \ \text{se } x = 2^m 3^n \\ (0, 0) & , \ \text{caso contrário} \end{cases}$.

   (k) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = 2x$.

   (l) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$.

   (m) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f(x, y) = (3x - y, x + y)$.

   (n) $f : (0, 1] \to [1, \infty),\ f(x) = 1/x$.

   (o) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x - |x|$.

   (p) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x^2 + y, x - y)$.

2. Sejam $f : A \to B$ uma função, $X, Y \subset A$ e $Z, W \subseteq B$. Prove que:

   (a) $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.

   (b) f injetora $\Rightarrow X = f^{-1}(f(X))$.

   (c) Mostre um exemplo onde $X \neq f^{-1}(f(X))$.

   (d) $f(f^{-1}(Z)) \subseteq Z$.

   (e) f sobrejetora $\Rightarrow f(f^{-1}(B)) = B$.

   (f) Mostre um exemplo no qual $B \neq f(f^{-1}(B))$

7.5 Função inversa

Recordemos que se $\mathcal{R}$ é uma relação de A em B, então a relação inversa

$$\mathcal{R}^{-1} = \{f(y, x); (x, y) \in \mathcal{R}\}$$

é uma relação de B em A.

Como toda função $f : A \to B$ é também uma relação de A em B, então podemos sempre considerar a relação inversa f^{-1} de B em A. A pergunta que naturalmente surge é: quando que essa relação inversa é uma função? Esta questão é considerada no próximo resultado

Teorema 7.19. *Dada uma função $f : A \to B$, considere a relação inversa $f^{-1} \subset B \times A$. Então f^{-1} é uma função de B em A se e somente se f é bijetora.*

Demonstração.

($\Leftarrow$) Sabendo que f é bijetora, basta verificar que $f^{-1} \subset B \times A$ satisfaz as duas condições da definição 7.1.

i. Para qualquer relação vale $Dom(f^{-1}) = Im(f)$. Como f é sobrejetiva então $Im(f) = B$, segue que $Dom(f^{-1}) = B$ e a primeira condição de 7.1 está verificada.

ii. Se $(b, a_1) \in f^{-1}$ e $(b, a_2) \in f^{-1}$. Então $(a_1, b) \in f$ e $(a_2, b) \in f$, ou seja, $f(a_1) = b = f(a_2)$. Como f é injetiva, temos $a_1 = a_2$.

($\Rightarrow$) Por outro lado, sabendo que f^{-1} é uma função, vamos mostrar que f é bijetora. Sabendo que $f^{-1} : B \to A$ é função temos $Dom(f^{-1}) = B$, como $Im(f) = Dom(f^{-1}) = B$, segue que a função f é sobrejetiva.

Para a injetividade, sejam $a_1, a_2 \in A$ tais que $f(a_1) = f(a_2)$. Logo $(a_1, f(a_1)) \in f$ e $(a_2, f(a_2)) \in f$. Daqui temos $(f(a_1), a_1) \in f^{-1}$ e $(f(a_2), a_2) \in f^{-1}$. Como f^{-1} é função então $a_1 = a_2$. Isso prova que a função f é injetiva. □

Este teorema mostra que faz sentido falar em função inversa apenas quando a função original é bijetiva. vamos enfatizar isso na seguinte definição.

Definição 7.20. *A função inversa de uma função bijetora $f : A \to B$ é a função $f^{-1} : B \to A$ que satisfaz a seguinte condição para $a \in A$ e $b \in B$:*

$$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b.$$

Observação: Para uma relação $\mathcal{R}$ qualquer sabemos que $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$. Em particular, se $f : A \to B$ é uma função bijetiva, como $(f^{-1})^{-1} = f$, segue que $(f^{-1})^{-1}$ é função e, pelo teorema acima, f^{-1} também é bijetiva (pois tem inversa).

7.5.1 Exercícios

1. Seja $b \in B$ um elemento fixado e considere a função constante $C_b : A \to B$ definida por $C_b(x) = b$, para todo $x \in A$. Mostre que C_b é sobrejetora se e somente se $B = \{b\}$. Sob qual condição é possível afirmar que C_b é injetiva?

2. Considere as projeções na primeira e na segunda coordenadas, ou seja, as funções $\pi_1 : A \times B \to A$ e $\pi_2 : A \times B \to B$ definidas por $\pi_1(a, b) = a$ e $\pi_2(a, b) = b$, para todo $(a, b) \in A \times B$. Prove que essas projeções são sobrejetivas. Quando é que uma projeção em é injetiva?

3. Construa uma bijeção entre o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e o conjunto de todos os números naturais pares. E encontre sua inversa.

4. Construa uma bijeção entre o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros e o conjuntos de todos os inteiros ímpares. E encontre sua inversa.

5. Seja $f : A \to B$ uma função e considere subconjuntos $R \subset A$ e $S \subset B$. Mostre que:

   (a) Se f é injetiva então $f^{-1}(f(R)) = R$;

   (b) Se f é sobrejetiva então $f(f^{-1}(S)) = S$.

7.6 Composição de funções

Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer, f uma relação de A em B e g uma relação de B em C. Na definição 5.6 definimos a relação composta $g \circ f$ de A em C da seguinte forma:

$$g \circ f = \{(a, c) \in A \times C; \exists b \in B,\ (a, b) \in f \text{ e } (b, c) \in g\},$$

Falta garantir que a relação $g \circ f$ é de fato uma função, mas:

1. $Dom(g \circ f) = Dom(f) = A$;

2. Se $(a, c) \in g \circ f$ e $(a, d) \in g \circ f$, precisamos mostrar que $c = d$.
   Como f é função, para cada $a \in A$, existe um único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$; e como g é função, para este $b = f(a) \in B$, existe um único $c \in C$ tal que $(f(a), c) \in g$, ou seja, $(f(a), g(f(a))) \in g$. Essa unicidade de existência garante que $d = c$, logo

$$c = g(b) = g(f(a)).$$

Isso demonstra o seguinte resultado:

Teorema 7.21. *Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções então a relação composta $g \circ f$ é uma funcão de A em C.*

Os diagramas sagitais são ferramentas importantes para entender a ordem que a composição é feita. Por exemplo, um diagrama para a composta das funções $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$ é o seguinte

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h \circ g"'] & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

Exemplo 7.22. Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2$, então

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1 \end{aligned}$$

Este exemplo mostra que a composição de funções não é comutativa.

Teorema 7.23. *A composição de funções é associativa.*

Demonstração. Para demonstrar este resultado o primeiro passo é estabelecer a notação para que possamos trabalhar. Para tanto, sejam $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$ três funções dadas para as quais estejam definidas as funções compostas $h \circ (g \circ f) : A \to D$ e $(h \circ g) \circ f : A \to D$ (o diagrama acima serve de referência para essas composições).

Para provar que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ precisamos mostrar que $h \circ (g \circ f)(x) = (h \circ g) \circ f(x)$, para todo $x \in A$, o que é trivial, pois

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) \text{ e} \\ ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))). \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 7.24. *Sejam $f : A \to B$ uma função qualquer e considere as funções identidade $Id_A : A \to A$ e $Id_B : B \to B$ definidas por $Id_A(a) = a, \forall a \in A$ e $Id_B(b) = b, \forall b \in B$, então:*

1. *Se existir uma função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = Id_A$ então f é injetora*

2. *Se existir uma função $h : B \to A$ tal que $f \circ h = Id_B$ então f é sobrejetora*

Demonstração. 1. sejam $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Como $g \circ f = Id_A$ então $x_1 = x_2$.

2. dado $y \in B$, vamos denotar $x = h(y)$, então $f(x) = f(h(y))$. Como $f \circ h = Id_B$ então $f(x) = y$. □

Observação: A função g (resp. h) descrita no teorema acima é chamada de inversa à esquerda (resp. à direita) de f. Com essa nomenclatura o resultado acima é frequentemente descrito assim "se uma função tem inversa à esquerda (respec. à direita) então esta função é injetiva (resp. sobrejetiva)."

7.6.1 Exercícios

1. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ e $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ as funções definidas por $f(x) = 10^x$ e $g(x) = \log_{10} x$. Encontre as compostas $f \circ g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ e $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Sejam $f : A \to B$ uma função qualquer, mostre que $f \circ Id_A = f$ e $Id_B \circ f = f$.

3. Seja $f : A \to B$ uma função qualquer e $f^{-1} : B \to A$ sua inversa, mostre que $f \circ f^{-1} Id_B$ e $f^{-1} \circ f = Id_A$.

4. Dada uma função $f : A \to B$, suponha que existam funções $g, h : B \to A$ tais que $g \circ f = Id_A$ e $f \circ h = Id_B$. Prove que f é bijetora e que $f^{-1} = h = g$.

5. Mostre que a composta de funções injetoras ainda é injetora.

6. Mostre que a composta de funções sobrejetoras ainda é sobrejetora.

7. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ duas bijeções. Prove que a composta $g \circ f$ é uma bijeção e que a inversa $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.