Exercícios – Fundamentos de Análise

16/05/2017

1. Use a definição (com ε e δ) para provar que: $a)\lim \frac{n}{n^2+1} = 0$ e $b)\lim \frac{6n^2}{2-3n^2} = -2$.
2. Usando ε e δ, escreva a **negação** da definição de $\lim a_n = L$. A seguir use essa expressão para mostrar que $\lim \frac{n+1}{n} \neq 2$.
3. Se $\lim x_n = a$, mostre que $\lim |x_n| = |a|$. Dê um contra-exemplo para mostrar que a recíproca desse resultado é falsa.
4. Usando apenas a definição de convergência, prove que, se (a_n) é uma sequência convergente, então $\lim \frac{a_n}{n} = 0$.
5. Suponha que $\lim x_n = a$ e $\lim(x_n - y_n) = 0$, mostre que $\lim y_n = a$
6. Se $\lim x_n = a$, $\lim z_n = a$ e existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq y_n \leq z_n$, para todo $n \geq n_o$, então $\lim y_n = a$.
7. Se $\lim x_n = 0$ e $y_n = \min\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}, \forall n \in \mathbb{N}$, mostre que $y_n \to 0$.
8. Seja (b_n) uma sequência convergente com limite $b \neq 0$. Prove que apenas um número finito de termos desta sequência podem ser nulos.
9. Mostre que uma sequência limitada que não converge possui pelo menos duas subsequências convergentes.
10. Seja (a_n) e (b_n) sequências tais que $|a_n - a| < k|b_n|$, sendo $a, k \in \mathbb{R}$ e $k > 0$. Mostre que se $b_n \to 0$ então $\lim x_n = a$.
11. Prove que $\lim(\sqrt{n+h} - \sqrt{n}) = 0$
12. Seja (a_n) uma sequência qualquer e (b_n) uma sequência que convergente. Prove que a sequência $(b_n \cos(a_n))$ é limitada.
13. Se $a \neq 0$ e $\lim \dfrac{x_n}{a} = 1$ então $\lim y_n = a$
14. Se $a \neq 0$, $\lim x_n = a$ e $\lim x_n y_n = b$ então $\lim y_n = \dfrac{a}{b}$
15. Suponha que $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ e que $|a_n - b_n| \geq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Mostre que $|a - b| \geq 1$.
16. Seja (a_n) uma sequência qualquer e (b_n) uma sequência que convergente. Prove que a sequência $(b_n \cos(a_n))$ é limitada.
17. Seja (x_n) uma seqüência de termos positivos que não possui nenhuma subseqüência convergente, prove que (x_n) não é limitada.
18. Seja (a_n) uma sequência com $\lim |a_n| = +\infty$, prove que (a_n) não possui nenhuma subsequência limitada.
19. Dê exemplos de sequências limitadas que possuem subsequências convergentes.
20. Seja (a_n) uma sequência limitada e (b_n) uma sequência tal que $\lim b_n = +\infty$, mostre que $\lim(a_n + b_n) = +\infty$.
21. Seja (a_n) uma sequência não limitada. Mostre que (a_n) possui uma subsequência $\{a_{n_k}\}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{a_{n_k}} = 0$
22. Seja $x_1 = \sqrt{2}$ e defina $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$. Verifique que $|x_{n+2} - x_{n+1}| < \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$. Conclua que existe o limite $a = \lim x_n$ e calcule o valor de a.