

Exercícios – Fundamentos de Análise

08/06/2017

1. Seja $\sum a_n$ uma série convergente com termo geral $a_n \geq 0$ e (b_n) uma sequência limitada. Prove que a série $\sum a_n b_n$ converge.
2. Se $\sum a_n$ é uma série convergente, mostre que $\sum a_n^2$ converge. Dê um exemplo para mostrar que a recíproca é falsa.
3. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries convergentes com termo geral não negativo. Prove que a série $\sum a_n b_n$ converge. dica: $(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2$.
4. Sejam (a_n) e (b_n) sequências de termos não negativos. Mostre que se a série $\sum b_n$ converge e $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$, então $\sum a_n$ converge.
5. Mostre que: $\sum a_n$ converge $\iff \sum \frac{a_n}{a_n + 1}$ converge.
6. Dados $a, r > 0$, mostre que se a série $\sum \frac{1}{a + nr}$ diverge.
7. Dado $a \in \mathbb{R}$ qualquer, mostre que a série abaixo é convergente e calcule a soma.

$$a^2 + \frac{a^2}{1 + a^2} + \frac{a^2}{(1 + a^2)^2} + \dots$$

8. Verifique se a série $\sum \sin(1/n)$ converge ou diverge.
9. Use o critério da comparação para verificar qual das seguintes séries são convergentes:
 $i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$, $ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, $iii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$, $iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}$, $v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$, $vi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^n - n}$.
10. Sejam $a > 1$ um número real e k um inteiro positivo. Mostre que as seguintes séries são convergentes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^n},$$

11. Calcule as somas parciais da série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n}$ e use isso para mostrar que essa série converge e tem soma igual a 1.

12. Seja (a_n) uma sequência monótona decrescente tal que $\lim a_n = 0$. Mostre que a série $\sum (-1)^{n+1} a_n$ converge. (sugestão: calcule as somas parciais de ordem par e de ordem ímpar e observe que $S_2 \leq S_4 \leq \dots \leq S_{2n} \leq \dots \leq S_{2n+1} \leq \dots \leq S_3 \leq S_1$ então...)

13. Seja $P(x)$ um polinômio de grau superior a 1. Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P(n)}$ converge.

14. Usando um teste de convergência, verifique quais das seguintes séries são convergentes:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} n^b a^n, 0 < a < 1, \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}, \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{2^{n^2}}, a > 0, \quad v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{a^n 2^{n^2}}.$$

15. Verifique quais das seguintes séries são convergentes. Para as séries que forem convergentes diga se a convergência é absoluta ou condicional.

$$i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n^2 + 1}, \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}, \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n + 1}, \quad iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}, \quad v) \sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n} \frac{1}{n}.$$

Entrega da lista: 22/06/2017 (na sala de aula)

15h30	Amanda e Andreia
15h45	Daiane e Diovana
16h00	Eduarda e Elaine
16h15	Helder, Jaqueline
16h30	Leticia e Letícia
16h45	Marcela, Rita e Welington