1ª Prova - Complementos da Matemática - Noite

Gabarito

1. Construa a tabela verdade de cada uma das proposições abaixo:

   (a) $(p \to q) \wedge (p \to \sim q) \leftrightarrow \sim p$;

   Na última coluna teremos a seguinte sequência: VVVV (é uma tautologia).

   (b) $(\sim p \to q) \wedge \sim q \to p$.

   Na última coluna teremos a seguinte sequência: VVVV (é uma tautologia).

2. Utilizando a *técnica dedutiva*, mostre que as equivalências a seguir são válidas:

   (a) $(p \vee q \to q) \Leftrightarrow (p \to q)$;

   $(p \vee q \to q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q) \vee q \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)$
   $\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge t \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \to q)$

   (b) $(p \to r) \wedge (q \to r) \Leftrightarrow (p \vee q \to r)$.

   $(p \to r) \wedge (q \to r) \Leftrightarrow (\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee r \Leftrightarrow \sim (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee q \to r)$

3. Escreva a negação de cada uma das proposições a seguir:

   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists a > 0,\ x + a > 0$;

   $\exists x \in \mathbb{R}, \forall a > 0,\ x + a \leqslant 0$;

   (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

   $\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \wedge x_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

4. Reescreva as frases abaixo usando a “linguagem formal” (conectivos e quantificadores), faça a negação e depois reescreva essas negações em linguagem coloquial.

   (a) Se a soma de dois números reais é positiva então pelo menos um deles é positivo;

   - $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y > 0 \Rightarrow x > 0 \vee y > 0$;
   - $\exists x, y \in \mathbb{R}, x + y > 0 \wedge (x \leqslant 0 \wedge y \leqslant 0)$;
   - Existem números reais não positivos cuja soma é positiva.

   (b) f é sublinear se, e somente se, para cada x e y no domínio de f e $\alpha > 0$ vale $f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$ e $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

   - f é sublinear $\Leftrightarrow \forall x, y \in Dom(f), \forall \alpha > 0,\ f(x+y) \leqslant f(x) + f(y) \wedge f(\alpha x) = \alpha f(x)$;
   - f não é sublinear $\Leftrightarrow \exists x, y \in Dom(f), \exists \alpha > 0,\ f(x+y) > f(x) + f(y) \vee f(\alpha x) \neq \alpha f(x)$;
   - f não é sublinear se, e somente se, existem x e y no domínio de f e $\alpha > 0$ tais que $f(x+y) > f(x) + f(y)$ ou $f(\alpha x) \neq \alpha f(x)$;

5. Usando o método de indução matemática prove que, para $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\left(1-\frac{1}{2}\right) \times \left(1-\frac{1}{3}\right) \times \left(1-\frac{1}{4}\right) \times \cdots \times \left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$

A afirmação vale para $n = 1$, pois $(1 - 1/2) = 1/2$. Supondo que a afirmação vale para $n = k$, ou seja,

$$\left(1-\frac{1}{2}\right) \times \left(1-\frac{1}{3}\right) \times \cdots \times \left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}$$

precisamos provar que a afirmação vale para $n = k + 1$, ou seja, que

$$\left(1-\frac{1}{2}\right) \times \left(1-\frac{1}{3}\right) \times \cdots \times \left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}$$

Mas

$$\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right) \times \left(1-\frac{1}{3}\right) \times \cdots \times \left(1-\frac{1}{k}\right)}_{\text{hip. ind.}} \times \left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k} \times \left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k} \times \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}$$

(b) $4^n - 1$ é múltiplo de 3.

A afirmação vale para $n = 1$, pois $4^1 - 1 = 3$. Supondo $4^k - 1$ é múltiplo de 3, ou seja, que existe ℓ natural tal que $4^k - 1 = 3\ell$, precisamos provar que $4^{k+1} - 1$ é múltiplo de 3, ou seja, que $4^{k+1} - 1 = 3j$, para algum j natural . Mas

$$4^{k+1} - 1 = 4 \cdot 4^k - 1 = 3 \cdot 4^k + \underbrace{4^k - 1}_{\text{hip. ind.}} = 3 \cdot 4^k + 3\ell = 3(4^k + \ell) = 3j.$$