1ª Prova - Complementos da Matemática - Tarde

Gabarito

1. Construa a tabela verdade de cada uma das proposições abaixo:

   (a) $p \wedge \sim q \to q \wedge r$;

   Na última coluna teremos a seguinte sequência: VVFFVVVV

   (b) $(q \to p) \wedge q \to p$

   Na última coluna teremos a seguinte sequência: VVVV (é uma tautologia)

2. Utilizando a *técnica dedutiva*, mostre que os argumentos a seguir são válidos:

   (a) $(p \vee q \to q) \Leftrightarrow p \to q$

   $(p \vee q \to q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q) \vee q \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)$
   $\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge t \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \to q)$

   (b) $(p \to q) \wedge (p \to r) \Leftrightarrow (p \to q \wedge r)$

   $(p \to q) \wedge (p \to r) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \Leftrightarrow \sim p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \to q \wedge r)$

3. Escreva a negação de cada uma das proposições a seguir:

   (a) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n \leqslant a \wedge a < n+1$;

   $\exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n > a \vee a \geqslant n+1$.

   (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$.

   $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, x \in (a-\delta, a+\delta) \wedge f(x) \notin (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$.

4. Reescreva as frases abaixo usando a "linguagem formal" (conectivos e quantificadores), faça a negação e depois reescreva essas negações em linguagem coloquial.

   (a) Se o produto de dois números reais é positivo então eles tem o mesmo sinal, ou seja, ambos são positivos ou ambos são negativos;

   - $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \cdot y > 0 \Rightarrow (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$;
   - $\exists x, y \in \mathbb{R}, x \cdot y > 0 \wedge [(x \leqslant 0 \vee y \leqslant 0) \wedge (x \geqslant 0 \vee y \geqslant 0)]$;
   - Existem números reais que não possuem o mesmo sinal cujo produto é positivo.

   (b) f é crescente se, e somente se, dados a e b no domínio de f, temos $f(a) < f(b)$, sempre que $a < b$;

   - $\forall a, b \in Dom(f), a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$;
   - $\exists a, b \in Dom(f), a < b \wedge f(a) \geqslant f(b)$;
   - Existem números reais a e b no domínio de f tais que $a < b$ e $f(a) \geqslant f(b)$.

5. Usando o método de indução matemática:

(a) prove que a soma dos primeiros n números pares é $n(n+1)$.

A afirmação vale para $n = 1$, pois $1(1+1) = 2$. Supondo que a afirmação vale para $n = k$, ou seja, que a soma dos k primeiros números pares é $k(k+1)$, precisamos provar que a afirmação vale para $n = k+1$, ou seja, que a soma dos k primeiros números pares é $(k+1)(k+2)$. Mas

$$\underbrace{2+4+6+\cdots+2k}_{\text{hip. indução}} + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1) = (k+2)(k+1).$$

(b) prove que $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1+2+...+n)^2$, para $n \in \mathbb{N}$.

Note que dentro do parênteses temos a soma dos primeiros n números naturais, ou seja,

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

Logo $(1+2+...+n)^2 = (n(n+1)/2)^2 = n^2(n+1)^2/4$, portanto o enunciado pode ser reescrito da seguinte forma

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{2}$$

Para concluir esse exercício precisamos provar ambas as afirmações (1) e (2) usando indução. Como fizemos a (1) em sala, segue abaixo apenas a prova de (2).

A afirmação vale para $n = 1$, pois $1^3 = 1^2$. Supondo que a afirmação vale para $n = k$, ou seja, que

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4},$$

precisamos provar que a afirmação vale para $n = k+1$, ou seja,

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4},$$

Mas

$$\begin{aligned}\underbrace{1^3 + 2^3 + ... + k^3}_{\text{hip. ind.}} + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2(k^2+4(k+1))}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}\end{aligned}$$