

1ª Prova - Complementos da Matemática - Noite

1. Construa a tabela verdade de cada uma das proposições abaixo:

(a) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow \sim p$;

(b) $(\sim p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow p$.

2. Utilizando a *técnica dedutiva*, mostre que as equivalências a seguir são válidas:

(a) $(p \vee q \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$;

(b) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q \rightarrow r)$.

3. Escreva a negação de cada uma das proposições a seguir:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists a > 0, x + a > 0$;

(b) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

4. Reescreva as frases abaixo usando a “linguagem formal” (conectivos e quantificadores), faça a negação e depois reescreva essas negações em linguagem coloquial.

(a) Se a soma de dois números reais é positiva então pelo menos um deles é positivo;

(b) f é sublinear se, e somente se, para cada x e y no domínio de f e $\alpha > 0$ vale $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ e $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

5. Usando o método de indução matemática prove que, para $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$

(b) $4^n - 1$ é múltiplo de 3.

Variações da Condicional

| | |
|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| 1. $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$ | Fundamental (Fund) |
| 2. $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$ | Contrapositiva (CP) |
| 3. $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \sim q \rightarrow c$ | Reductio ad Absurdum (RAA) |
| 4. $\sim (p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$ | Negação da Condicional (NC) |

Equivalências

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 5. $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$ | Dupla Negação (DN) |
| 6. $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ | Associativas (Assoc) |
| 7. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | Distributivas (Distr) |
| 8. $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ | De Morgan (DeM) |
| 9. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ | Comutativas (Comut) |
| 10. $p \wedge p \Leftrightarrow p, \quad p \vee p \Leftrightarrow p$ | Idempotência (Idemp) |

Implicações

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| 11. $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ | Modus Ponens (MP) |
| 12. $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$ | Modus Tolens (MT) |
| 13. $p \Rightarrow p \vee q \quad q \Rightarrow p \vee q$ | Adição (Ad) |
| 14. $p \wedge q \Rightarrow p \quad p \wedge q \Rightarrow q$ | Simplificação (Simp) |
| 15. $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$ | Silogismo Disjuntivo (SD) |
| 16. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$ | Transitiva (Trans) |

Tautologias e Contradições

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| 17. $p \wedge t \Leftrightarrow p \quad p \vee t \Leftrightarrow t \quad p \Rightarrow t$ | Tautologias (Taut.) |
| 18. $p \wedge c \Leftrightarrow c \quad p \vee c \Leftrightarrow p \quad c \Rightarrow p$ | Contradições (Cont.) |