Capítulo 3

SÉRIES INFINITAS

Primeiros exemplos

Vamos iniciar nosso estudo das séries infinitas com exemplos simples. Essas séries surgem muito cedo, ainda no ensino fundamental, quando lidamos com dízimas periódicas. Com efeito, uma dízima como $0,777\ldots$ nada mais é do que uma progressão geométrica infinita. Veja:

$$0,777\ldots = 7 \times 0,111\ldots = 7\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots\right)$$

$$= 7\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots\right) = 7\left(\frac{1}{1 - 1/10} - 1\right) = 7\left(\frac{10}{9} - 1\right) = \frac{7}{9}.$$

Mas quando se ensinam essas dízimas, não é preciso recorrer às séries infinitas, pode-se usar o procedimento finito que utilizamos no Capítulo 1, assim:

$$x = 0,777\ldots \Rightarrow 10x = 7,777\ldots = 7 + x \Rightarrow 9x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{9}.$$

Voltando às séries infinitas, o que significa "soma infinita"? Como somar um número após outro, após outro, e assim por diante, indefinidamente? Num primeiro contato com séries infinitas, particularmente séries de termos positivos, a idéia ingênua e não crítica de soma infinita não costuma perturbar o estudante. Porém, encarar somas infinitas nos mesmos termos das somas finitas acaba levando a dificuldades séries, ou mesmo a conclusões irreconciliáveis, como bem ilustra um exemplo simples, dado pela chamada "série de Grandi":

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Esta série tanto parece ser igual a zero como igual a 1, dependendo de como a encaramos. Veja:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0.$$

Mas podemos também escrever:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = 1.$$

E veja o que ainda podemos fazer:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = 1 - S,$$

donde a equação $S = 1 - S$, que nos dá $S = 1/2$.

Como decidir então? Afinal, S é zero, 1 ou 1/2?

Para encontrar uma saída para dificuldades como essa que vimos com a série de Gradi, temos de examinar detidamente o conceito de adição. Somar números, sucessivamente, uns após outros, é uma idéia concebida para uma quantidade finita de números a somar. Ao aplicá-la a somas infinitas, por mais que somemos, sempre haverá parcelas a somar; portanto, o processo de somas sucessivas não termina, em consequência, não serve para definir a soma de uma infinidade de números.

O conceito de soma infinita

O conceito de soma infinita é formulado de maneira a evitar um envolvimento direto com a soma de uma infinidade de parcelas. Assim, dada uma série infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{3.1}$$

contentamo-nos em considerar as somas parciais

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \text{etc.}$$

Em geral, designamos por S_n a soma dos primeiros n elementos da seqüência (a_n), que é chamada a *soma parcial* ou *reduzida de ordem* n associada a essa seqüência:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \tag{3.2}$$

Desse modo formamos uma nova seqüência infinita (S_n), que é, por definição, a *série de termos* a_n . Se ela converge para um número S, definimos a *soma infinita* indicada em (3.1) como sendo esse limite:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = S = \lim S_n = \lim \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Esse último símbolo indica a soma da série, ou limite S de S_n. Mas é costume indicar a série (S_n) com esse símbolo mesmo que ela não seja convergente. Freqüentemente usamos também o símbolo simplificado $\sum a_n$ com o mesmo significado. A diferença $S - S_n = R_n$ é apropriadamente chamada o *resto de ordem* n da série. Às vezes, quando consideramos certas séries particulares, a reduzida de ordem n pode não conter exatamente n termos, dependendo do índice n onde começamos a somar. Por exemplo, na série geométrica abaixo começamos a somar em $n = 0$ e a reduzida S_n contém $n + 1$ termos. Dependendo de onde se começa a somar, a reduzida S_n pode conter mais ou menos que n termos.

Como se vê, a noção de série infinita generaliza o conceito de soma finita, pois a série se reduz a uma soma finita quando todos os seus termos, a partir de um certo índice, são nulos. Mas é bom enfatizar que há uma real diferença entre a soma de um número finito de termos e a soma de uma série infinita. Esta última não resulta de somar uma *infinidade* de termos — operação impossível; ela é, isto sim, o *limite* da soma finita S_n.

Propriedades e exemplos

3.1. Teorema. *Se uma série converge, seu termo geral tende a zero.*

Demonstração. Seja $\sum a_n$ uma série de reduzida S_n e soma S. Então, $a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$, como queríamos demonstrar.

3.2. Exemplo (série geométrica). De importância fundamental é a *série geométrica de razão* q:

$$1 + q + q^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Sua reduzida S_n é a soma dos termos de uma progressão geométrica:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Supondo $|q| < 1$, q^n tende a zero, de forma que essa expressão converge para $1/(1-q)$, que é o limite de S_n ou soma da série geométrica:

$$1 + q + q^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Notemos que a série é divergente se $|q| \geq 1$, pois neste caso seu termo geral não tende a zero.

O teorema anterior nos dá uma *condição necessária* para a convergência de uma série. Essa condição, todavia, não é *suficiente*. É fácil exibir séries divergentes cujos termos gerais tendem a zero. Por exemplo, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ (Exerc. 9 da p. 55); no entanto, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

é divergente, pois sua reduzida de ordem n é

$$\begin{aligned} S_n &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1, \end{aligned}$$

que tende a $+\infty$.

O exemplo mais notável de série divergente, cujo termo geral tende a zero, é o da chamada "série harmônica", que vamos discutir agora.

3.3. Exemplo. Chama-se *série harmônica* à série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Pelo modo como seu termo geral tende a zero, quem encontra essa série pela primeira vez é inclinado a pensar que ela converge. Foi Nicole Oresme, um matemático do século XIV, quem primeiro provou que ela diverge. (Veja a nota "A divergência da série harmônica" na p. 95.) Oresme começou por agrupar os termos da série assim:

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{32}\right) + \dots \end{aligned}$$

Em seguida ele observou que cada um desses grupos é maior do que $1/2$:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} = 8 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{32} > \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32} = 16 \times \frac{1}{32} = \frac{1}{2};$$

e assim por diante, de sorte que

$$\begin{aligned} S &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} + 8 \times \frac{1}{16} + 16 \times \frac{1}{32} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

Como esta última soma é infinita, é claro que a série diverge.

Para tornar esse raciocínio um pouco mais formal, observamos que todos os termos da série são positivos, de forma que suas reduzidas formam uma seqüência crescente. Basta, pois, exibir uma subseqüência de reduzidas tendendo a infinito. É esse o caso da subseqüência

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots \\ &+ \left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right) \\ &= 1+\frac{1}{2}+\sum_{j=2}^{n}\left(\frac{1}{2^{j-1}+1}+\frac{1}{2^{j-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^j}\right). \end{aligned}$$

Substituindo os denominadores de cada um dos termos deste último parênteses por 2^j, obtemos

$$S_{2^n} \geq 1+\frac{1}{2}+\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{2^j}(2^j-2^{j-1}) = 1+\frac{n}{2},$$

que prova o resultado anunciado.

3.4. Teorema (Critério de Cauchy para séries). *Uma condição necessária e suficiente para que uma série $\sum a_n$ seja convergente é que dado qualquer $\varepsilon > 0$, exista N tal que, para todo inteiro positivo p,*

$$n > N \Rightarrow |a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Este teorema é uma simples adaptação do Teorema 2.12 da p. 57 à seqüência de somas parciais S_n. Basta notar que

$$|S_{n+p}-S_n| = |a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|.$$

3.5. Teorema. *Se as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergem e k é um número qualquer, então $\sum ka_n$ e $\sum(a_n+b_n)$ convergem e*

$$\sum ka_n = k\sum a_n \quad \text{e} \quad \sum(a_n+b_n) = \sum a_n + \sum b_n.$$

Este teorema é uma conseqüência imediada de propriedades análogas já estabelecidas para seqüências (Teorema 2.8, p. 52). Dele segue, em particular, que se verificarmos a convergência de uma série, considerada somente a partir de um certo índice N, então a série toda é convergente e vale a igualdade

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_N + \sum_{n=1}^{\infty} a_{N+n},$$

que decorre da seguinte observação:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim S_n = \lim(S_N + a_{N+1} + \ldots + a_{N+n}) \\ &= \lim S_N + \lim(a_{N+1} + \ldots + a_{N+n}) = S_N + \sum_{n=1}^{\infty} a_{N+n}.\end{aligned}$$

Séries de termos positivos

Suponhamos que $\sum p_n$ seja uma série de termos positivos (ou não negativos). Então, a seqüência de somas parciais

$$S_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n,$$

é não decrescente. Em conseqüência, a série converge ou diverge para $+\infty$, conforme essa seqüência seja limitada ou não.

Suponhamos que os termos da série sejam reindexados numa outra ordem qualquer,

$$p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_n + \ldots$$

Assim, p'_1 pode ser, digamos, o elemento p_5 , p'_2 pode ser p_9, p'_3 pode ser p_1 etc. Então, como os termos são todos não negativos, a nova soma parcial,

$$S'_n = p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_n$$

será dominada por alguma soma parcial S_m com $m > n$. Se a série original converge para S, teremos $S'_n \leq S_m \leq S$, isto é, as somas parciais S'_n formam uma seqüência não decrescente e limitada, portanto, convergente. Seu limite S' é seu supremo, de sorte que $S' \leq S$. Mas a série original também pode ser interpretada como obtida de $\sum p'_n$ por reindexação, portanto, o mesmo raciocínio nos leva a $S \leq S'$. Provamos assim o teorema que enunciamos a seguir.

3.6. Teorema. *Uma série convergente de termos não negativos possui a mesma soma, independentemente da ordem de seus termos.*

É fácil ver também que se a série diverge, ela será sempre divergente para $+\infty$, independentemente da ordem de seus termos.

A noção de "série convergente, independentemente da ordem de seus termos" pode ser formalizada facilmente. Basta notar que mudar a ordem dos termos corresponde a fazer uma "permutação infinita" desses termos, através de uma *bijeção* ou *correspondência biunívoca* de $\mathbf{N}$ sobre $\mathbf{N}$. (Veja a definição desses conceitos na p. 102.) Seja f uma tal bijeção e ponhamos $p'_n = p_{f(n)}$.

Diz-se então que a *série* $\sum p_n$ *é comutativamente convergente se for convergente a série* $\sum p'_n = \sum p_{f(n)}$ *e* $\sum p'_n = \sum p_n$*, qualquer que seja a bijeção* f.

Exercícios

1. Dada a seqüência S_n de reduzidas de uma série, construa a seqüência original de termos a_n da série.

2. Dada uma série convergente $\sum a_n$, com soma S e reduzida S_n, prove que seu resto R_n é a soma da série a partir do índice $n+1$.

3. Chama-se *série harmônica*, em geral, toda série cujos inversos de seus termos formam uma progressão aritmética, isto é, toda série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+nr}, \quad r \neq 0.$$

Demonstre que uma tal série é divergente.

4. Obtenha a reduzida da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ e mostre que seu limite (soma da série) é 1.

5. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} = \frac{1}{a}$.

6 O termo geral da série $\sum \log(1+1/n)$ tende a zero. Mostre, todavia, que ela é divergente, obtendo uma forma simples para sua reduzida S_n .

7. Dada uma série convergente $\sum a_n$ e uma seqüência crescente de números naturais $n_1 < n_2 < \ldots$, defina

$$b_1 = a_1 + \ldots + a_{n_1}, \quad b_2 = a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2},$$
$$b_3 = a_{n_2+1} + \ldots + a_{n_3} \text{ etc.}$$

Prove que a série $\sum b_n$ converge e tem a mesma soma que a série original.

8. Use o critério de Cauchy para provar que o termo geral de uma série convergente tende a zero.

9. Use o critério de Cauchy para provar que $\sum a_n$ converge se $\sum |a_n|$ converge.

10. Calcule a reduzida S_n da série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$ e mostre que seu limite é 1.

11 Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+2)}{n(n+1)} = 1 - 3(\log 2)$, sabendo que $\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

12. Calcule a soma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+5)}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{2}$.

13. Mostre que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-n-1}{n!}$ tem soma igual a 2.

Respostas, sugestões e soluções

1. $a_1 = S_1, \quad a_n = S_n - S_{n-1}, \; n \geq 2.$

2. Utilize o Teorema 3.5. Ou faça diretamente: pela definição que demos de resto, $R_n = S - S_n$. Por outro lado,
$$S = \lim_{m\to\infty}(S_n + \sum_{j=1}^{m} a_{n+j}) = S_n + \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m} a_{n+j}.$$
Daqui e de $S = R_n + S_n$, concluímos que $R_n = \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m} a_{n+j} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{n+j}$.

3. Se $a > 0$ e $r > 0$, mostre que o termo geral da série pode ser feito maior do que uma constante vezes $1/n$. No caso geral, trabalhe com os termos a partir de um certo índice, a partir do qual todos os termos tenham o mesmo sinal.

4. Observe que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

11. Proceda como no Exerc. 4, mostrando que $a_n = (-1)^n\left(\dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$.

12. Mostre que $a_n = (-1)^n\left(\dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3}\right)$.

Teste de comparação

Um dos problemas centrais no estudo das séries consiste em saber se uma dada série converge ou não. Há vários testes para isso, dentre os quais o *teste de comparação*, tratado a seguir, é o mais básico.

3.7. Teorema (teste de comparação). *Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries de termos não negativos, a primeira dominada pela segunda, isto é, $a_n \le b_n$ para todo n. Nessas condições podemos afirmar:*

a) $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge e $\sum a_n \le \sum b_n$;

b) $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge.

Demonstração. As reduzidas das séries dadas,
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \text{ e } T_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$
são seqüências não decrescentes, satisfazendo $S_n \le T_n$. No caso a), T_n converge para um certo limite T, de sorte que $S_n \le T$ para todo n. Assim, como S_n é uma seqüência não decrescente e limitada, ela converge para um certo $S \le T$.

A demonstração de b) exige muito pouco: se $\sum b_n$ convergisse, então, por a), $\sum a_n$ também teria de convergir, contrariando a hipótese.

Outra demonstração (pelo critério de Cauchy). Observe que
$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} \le b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+p}.$$
Se $\sum b_n$ converge, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que o membro da direita dessa desigualdade pode ser feito menor do que ε para $n > N$. Então o mesmo

é verdade do primeiro membro, provando que $\sum a_n$ converge. A demonstração da parte b) é a mesma anterior.

3.8. Exemplo. Já vimos, em (2.9) (p. 58), que o número e é dado por

$$e = \lim\left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Um modo de provar a convergência dessa série, independentemente do que vimos antes, consiste em observar que

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \ldots n} \leq \frac{1}{2 \cdot 2 \ldots 2} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

donde segue que, à exceção do primeiro termo, a série dada é dominada pela série geométrica de razão $1/2$, que é convergente; logo, a série original é convergente.

Irracionalidade do número e

Para provarmos que o número e é irracional, vamos primeiro obter uma estimativa do erro R_n que cometemos no cálculo desse número quando o aproximamos pela soma parcial S_n da série anterior (que vai até o termo $1/n!$). Temos

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right) \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + (n+2)^{-1} + (n+2)^{-2} + \ldots\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n!n}. \end{aligned}$$

Podemos então escrever: $S_n < e < S_n + 1/n!n$.

Se e fosse racional, isto é, se $e = m/n$, com m e n inteiros positivos, $n \geq 2$ (pois, como já sabemos, e não é inteiro), então

$$S_n < \frac{m}{n} = S_n + R_n < S_n + \frac{1}{n!n},$$

donde segue-se que $n!S_n < m(n-1)! < n!S_n + \dfrac{1}{n} < n!S_n + 1$. Ora, o número $n!S_n$ é inteiro, pois é igual a

$$n!\left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \frac{1}{n!}\right) = 2n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \ldots \frac{n!}{n!}.$$

Então a desigualdade anterior está afirmando que o número inteiro $m(n-1)!$ está compreendido entre os inteiros consecutivos $n!S_n$ e $n!S_n + 1$, um absurdo. Concluímos que o número e é irracional.

Pelo que vimos acima, S_n é uma aproximação do número e com erro inferior a $(1/n)(1/n!)$. Como $n!$ cresce muito rapidamente com n, S_n é realmente uma boa aproximação de e, mesmo para n não muito grande. Por exemplo, $n = 10$ já nos dá um erro inferior a 10^{-7}. Euler calculou o número e com 23 casas decimais, obtendo $e = 2,71828182845904523536028$.

3.9. Exemplo. Mostraremos agora que a série $\sum 1/n^x$ é convergente se $x > 1$ e divergente se $x \leq 1$. Este último caso é o mais fácil, pois então a série dada majora a série harmônica, visto que $x \leq 1 \Rightarrow n^x \leq n$, logo, $1/n^x \geq 1/n$.

Suponhamos agora que $x > 1$. Usaremos um raciocínio parecido com o que usamos no caso da série harmônica. Temos:

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}-1} &= 1 + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2^{jx}} + \frac{1}{(2^j+1)^x} + \ldots + \frac{1}{(2^{j+1}-1)^x}\right) \\ &< 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{jx}}(2^{j+1} - 2^j) = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{(x-1)j}} \\ &= \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{2^{x-1}}\right)^j < \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{x-1}}\right)^j = \frac{2^{x-1}}{2^{x-1}-1}. \end{aligned}$$

Vemos assim que a seqüência de reduzidas da série dada, que é uma seqüência crescente, possui uma subseqüência limitada, portanto convergente. Concluímos que a seqüência de reduzidas converge para o mesmo limite (Exerc. 1 da p. 62). Isso prova que a série original é convergente, como queríamos demonstrar.

O exemplo que acabamos de discutir nos mostra que a série harmônica está compreendida entre as séries convergentes $\sum 1/n^x$ com $x > 1$ e as séries divergentes $\sum 1/n^x$ com $x \leq 1$, situando-se, ela mesma, entre estas últimas.

É claro que a série $\sum 1/n^x$ define uma função de x, a qual é chamada *função zeta de Riemann*:

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}. \tag{3.3}$$

Embora conhecida por Euler (1707–1783) desde 1737, suas propriedades mais notáveis só vieram a ser descobertas por Riemann (1826–1866) em 1859, num memorável trabalho sobre teoria dos números.

Ao lado da série geométrica, a série (3.3) é muito usada como referência para testar se uma dada série converge ou diverge. Isso é possível quando o termo geral da série dada comporta-se como $1/n^x$ para n tendendo a infinito.

3.10. Exemplo. A série

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é evidentemente convergente e representa o valor $\zeta(2)$. Euler mostrou que a soma dessa série é $\pi^2/6$.[1] Vamos provar apenas que $1 < \sum 1/n^2 < 2$. Para isso observamos que

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}.$$

Nesta última série fazemos a mudança $n - 1 = m$, donde $n = m + 1$. Então,

$$1 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} = 2,$$

que é o resultado desejado.

O teste de comparação é muito usado para verificar a convergência de séries cujos termos gerais a_n são complicados, mas para os quais é relativamente fácil verificar que $a_n \leq b_n$, sendo b_n o termo geral de uma série convergente. Essa situação é ilustrada no exemplo seguinte.

3.11. Exemplo. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{15n + \sqrt{n^2 - 1}}{5n^3 + 2n\sqrt{n+1} - 17}$ é convergente. Para vermos isso notamos que seu termo geral a_n é tal que

$$n^2 a_n = \frac{15n^3 + n^2\sqrt{n^2 - 1}}{5n^3 + 2n\sqrt{n+1} - 17} \to \frac{16}{5}.$$

de sorte que (Teorema 2.6, p. 52), a partir de um certo índice N, teremos $2 < n^2 a_n < 4$; logo, a partir desse índice N, a série é positiva e dominada pela série de termo geral $4/n^2$. Como esta série é convergente, também o é a série original.

3.12. Exemplo. Usaremos o teste de comparação na ordem inversa para provar que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n+1}}{n^2 - 3}$$

é divergente. Para isso basta notar que, sendo a_n o termo geral da série, então $\sqrt{n} a_n \to 1$, de sorte que, a partir de um certo N, $a_n > 1/2\sqrt{n}$ e este número é o termo geral de uma série divergente.

3.13. Exemplos. Mostraremos que, sendo k inteiro positivo e $a > 1$, as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}. \tag{3.4}$$

[1]Veja nosso artigo na *Revista Matemática Universitária*, Nº 3, Junho de 1986).

são convergentes. De fato, pelo que vimos no Exemplo 2.18 (p. 60), $n^{k+2}/a^n \to 0$, de sorte que $n^k/a^n < 1/n^2$ a partir de um certo N. Isso prova que a primeira das séries em (3.4) é convergente por ser dominada, a partir de N, pela série convergente $\sum 1/n^2$.

No Exemplo 2.19 provamos que $a^n/n! < c/2^n$, o que mostra que a segunda das séries em (3.4) é convergente por ser dominada pela série convergente $\sum c/2^n$.

Finalmente observe que, sendo $n > 2$,

$$\frac{n!}{n^n} = \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n}\right) \frac{3}{n} \cdot \frac{4}{n} \cdots \frac{n}{n} < \frac{2}{n^2},$$

e aqui também podemos concluir que a terceira das séries em (3.4) é convergente.

Exercícios

1. Prove que se $\sum a_n$ é uma série convergente de termos positivos, então $\sum a_n^2$ é convergente.
2. Sejam $\sum a_n$ uma série convergente de termos positivos e (b_n) uma seqüência limitada de elementos positivos. Prove que $\sum a_n b_n$ converge.
3. Sendo $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$, prove que, se as séries $\sum a_n^2$ e $\sum b_n^2$ são convergentes, então a série $\sum a_n b_n$ também é convergente.
4. Prove que se $a_n \geq 0$ e $\sum a_n^2$ converge, então $\sum a_n/n$ converge.
5. Verifique, dentre as séries seguintes, qual delas converge, qual delas diverge:

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n}; \quad \text{b) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}; \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}; \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}};$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 23n + 9}{4n^3\sqrt{n+7} - 2n + \cos^3 n^2}; \quad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - \operatorname{sen}^2 3n}{2^n + n^2 + 1}; \quad \text{g) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^k};$$

$$\text{h) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}; \quad \text{i) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}\log n}; \quad \text{j) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}; \quad \text{k) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}.$$

6. Sejam $p_k(n)$ e $p_r(n)$ polinômios em n de graus k e r respectivamente. Prove que se $r - k \geq 2$ a série $\sum p_k(n)/p_r(n)$ é convergente, e se $r - k \leq 1$ ela é divergente.
7. Sendo $a > b > 0$, mostre que a série de termo eral $a_n = (a^n - b^n)^{-1}$ é convergente se $a > 1$ e divergente se $a \leq 1$.
8. Supondo $a_n \geq 0$ e $a_n \to 0$, prove que $\sum a_n$ converge ou diverge se, e somente se, $\sum a_n/(1 + a_n)$ converge ou diverge, respectivamente.
9. Prove que, se $a_n \geq 0$ e $\sum a_n$ converge, então $\sum a_n^2/(1 + a_n^2)$ converge. Construa um exemplo em que a primeira dessas séries diverge e a segunda converge; e outro exemplo em que ambas divergem.
10. Prove que, sendo $c > 0$, a série $\sum \operatorname{sen}(c/n)$ é divergente.