Lista de Exercícios – Fundamentos de Análise

Limites no infinito e sequências de Cauchy

22/05/2018

1. Dê exemplos de uma sequência não limitada que:
   (a) não possui subsequências convergentes;
   (b) possui uma subsequência convergente;
   (c) possui duas subsequências convergentes;
   (d) possui k subsequências convergentes, com k natural;
   (e) possui subsequências divergindo para $+\infty$, $-\infty$ e para 0.

2. Seja (a_n) uma sequência limitada e suponha que $\lim b_n = +\infty$. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Prove as afirmações verdadeiras e dê contra-exemplos para as afirmações falsas
   (a) $\lim(a_n + b_n) = +\infty$;
   (b) $\lim(a_n - b_n) = -\infty$;
   (c) $\lim(a_n b_n) = +\infty$;
   (d) $\lim a_n/b_n = 0$;
   (e) $\lim(b_n/a_n) = +\infty$;

3. Seja (a_n) uma sequência com $\lim |a_n| = +\infty$, prove que (a_n) não possui subsequências limitadas.

4. Seja (a_n) uma sequência não limitada. Mostre que (a_n) possui uma subsequência $\{a_{n_k}\}$ tal que $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{a_{n_k}} = 0$

5. Considere a sequência polinomial $p_n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \ldots + c_k n^k$, com $k \in \mathbb{N}$ fixado e $c_0, c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, com $c_k \neq 0$. Mostre que $\lim p(n)$ é igual a $+\infty$ ou $-\infty$ dependendo do sinal de c_k.

6. Seja (p_n) a sequência polinomial do exercício anterior. Mostre que $\lim \sqrt[n]{p_n} = 1$

7. Mostre que $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$

8. Seja $x_1 = \sqrt{2}$ e defina $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$. Verifique que $|x_{n+2} - x_{n+1}| < \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$. Conclua que existe o limite $a = \lim x_n$ e calcule o valor de a.

9. Vamos generalizar o exercício anterior. Seja $a > 1$ um número qualquer e considere a sequencia $x_1 = \sqrt{a}$ e $x_{n+1} = \sqrt{x_n + a}$. Prove que o limite deste sequência existe e calcule seu valor.

10. Defina uma sequência por $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, para todo $n > 1$. Mostre que a sequência (x_n) converge e calcule seu limite.