Lista de Exercícios – Fundamentos de Análise

Séries Numéricas

01/06/2018

1. Seja $\sum a_n$ uma série convergente com termo geral $a_n \geq 0$ e (b_n) uma sequência limitada. Prove que a série $\sum a_n b_n$ converge.

2. Se $\sum a_n$ é uma série convergente, mostre que $\sum a_n^2$ converge. Dê um exemplo para mostrar que a recíproca é falsa

3. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries convergentes com termo geral não negativo. Prove que a série $\sum a_n b_n$ converge. dica: $(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2$.

4. Sejam (a_n) e (b_n) sequências de termos não negativos. Mostre que se a série $\sum b_n$ converge e $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$, então $\sum a_n$ converge.

5. Mostre que: $\sum a_n$ converge $\Longleftrightarrow \sum \dfrac{a_n}{a_n + 1}$ converge.

6. Dados $a, r > 0$, mostre que se a série $\sum \dfrac{1}{a + nr}$ diverge.

7. Dado $a \in \mathbb{R}$ qualquer, mostre que a série abaixo é convergente e calcule a soma.
$$a^2 + \frac{a^2}{1+a^2} + \frac{a^2}{(1+a^2)^2} + \dots$$

8. Verifique se a série $\sum \text{sen}\,(1/n)$ converge ou diverge.

9. Use o critério da comparação para verificar qual das seguintes séries são convergentes:
$$i)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\ ,\quad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\ ,\quad iii)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}\ ,\quad iv)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}\ ,\quad v)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}\ ,\quad vi)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^n - n}.$$

10. Sejam $a > 1$ um número real e k um inteiro positivo. Mostre que as seguintes séries são convergentes:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^n},$$

11. Calcule as somas parciais da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ e use isso para mostrar que essa série converge e tem soma igual a 1.

12. Seja (a_n) uma sequência monótona decrescente tal que $\lim a_n = 0$. Mostre que a série $\sum (-1)^{n+1} a_n$ converge. (sugestão: calcule as somas parciais de ordem par e de ordem ímpar e observe que $S_2 \leq S_4 \leq ... \leq S_{2n} \leq ... \leq S_{2n+1} \leq ... \leq S_3 \leq S_1$ então...)

13. Seja $P(x)$ um polinômio de grau superior a 1. Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P(n)}$ converge.

14. Usando um teste de convergência, verifique quais das seguintes séries são convergentes:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} n^b a^n, 0 < a < 1 \ , \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \ , \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \ , \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{2^{n^2}}, a > 0 \ , \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{a^n 2^{n^2}}.$$

15. Verifique quais das seguintes séries são convergentes. Para as séries que forem convergentes diga se a convergência é absoluta ou condicional.

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n^2+1} \ , \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \ , \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1} \ , \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}, \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n} \frac{1}{n}.$$