1ª Prova de Análise na Reta - Gabarito

27/08/2018

Topologia da Reta

1. Sejam $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$ conjuntos abertos e denote $F_1 = \mathbb{R} - A_1$. Prove que:

   a. $A_1 \cup A_2$ é aberto

   Para provar que todos os pontos de $A_1 \cup A_2$ são interiores, seja $a \in A_1 \cup A_2$ um ponto qualquer, então $a \in A_1$ ou $a \in A_2$. Como A_j é aberto ($j = 1, 2$), existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A_j \subset A_1 \cup A_2$, ou seja $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A_1 \cup A_2$.

   b. $F_1 - A_2$ é fechado.

   Note que $F_1 - A_2 = F_1 \cap A_2^C$. Como A_1 e A^2 são abertos, seus complementares $F_1 = A_1^C$ e $F_1 = A_2^C$ são fechados e $F_1 - A_2$ é uma interseção de conjuntos fechados, logo é fechado.

2. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado não vazio e $s = \sup X$.

   a. Prove que $s \in \overline{X}$;

   Pela definição de supremo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $s - 1/n < x_n \leq s$. Logo (x_n) é uma sequência de pontos de X com $\lim x_n = s$, e portanto $s = \sup X$ é ponto aderente a X, ou seja, $s \in \overline{X}$.

   b. Dê um exemplo no qual s não seja ponto de acumulação de X.

   Basta tomar um conjunto discreto, como $X = \{1\}$, ou um conjunto que tenha um ponto de máximo isolado, como $X = [0, 1] \cup \{2\}$.

3. Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma família indexada de conjuntos compactos.

   a. Prove que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$ é um conjunto compacto;

   Denotemos $K \doteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Como cada X_n é fechado e a interseção arbitrária de conjuntos fechados é um conjunto fechado, então K é fechado. Além disso, $K \subset X_1$ e X_1 é limitado, logo K também é limitado. Daqui seque que K é compacto.

   b. Dê um exemplo no qual $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ não é um conjunto compacto.

   Basta tomar $X_n = [n, n+1]$ ou $X_n = [1, n]$, assim teremos X_n compacto para todo n natural, porém $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = [1, \infty)$ não é compacto, pois não é limitado.

Limites e Continuidade

4. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D'$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M > 0$, mostre que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$, para todo $x \in (a - \delta, a + \delta)$ diferente de a.

   Tomando $\varepsilon = M/2$ na definição de limite, obtemos $\delta > 0$ tal que, se $x \in (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$ então $f(x) \in (M - \varepsilon, M + \varepsilon) = (\frac{M}{2}, \frac{3M}{2})$. Daqui seque que $f(x) > M/2 > 0$, sempre que $x \in D$ e $x \in (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$.

5. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função limitada, $a \in D'$ e $g : D \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Mostre que $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Como f é limitada, existe $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K, \forall x \in D$. E, como $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in D \cap V'_\delta(a)$ então $|f(x)| < \varepsilon/K$. Logo, $|f(x)g(x)| < K \cdot \varepsilon/K = \varepsilon$, sempre que $x \in D \cap V'_\delta(a)$.

6. Escreva a definição precisa de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$. A seguir use sua definição para provar que

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2 - 4} = +\infty.$$

Definição: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > A.$

Agora,

$$\left|\frac{1}{x^2 - 4}\right| = \frac{1}{|x+2|.|x-2|} \overset{(*)}{>} \frac{1}{5\,\delta} > A \qquad (\#)$$

na desigualdade (*) acima usamos duas coisas:

1º) $1/|x - 2| > 1/\delta$, pois $|x - 2| < \delta$

2º) $1/|x + 2| > 1/5$, para $\delta < 1$

pois $|x - 2| < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3 \Leftrightarrow 3 < x + 2 < 5 \Leftrightarrow 1/3 > 1/|x + 2| > 1/5$.

Portanto, para cada $A > 0$ dado, se tomarmos $\delta < \min\{1, 1/(5A)\}$, teremos exatamente a desigualdade (#) acima, sempre que $0 < |x - 2| < \delta$.

7. Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto fixado e considere as funções $f, g : \mathbb{R} \setminus \{a\} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$ e $g(x) = \dfrac{x - a}{|x - a|}$. Mostre que f possui uma descontinuidade removível em $x = a$ e que g possui uma descontinuidade do tipo salto em $x = a$.

Note que $f(x) = \dfrac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a$, sempre que $x \neq a$. Logo

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x + a = 2a,$$

ou seja, o limite de f no ponto $x = a$ existe, e portanto a descontinuidade neste ponto é removível.

No segundo caso, para $x > a$ temos $g(x) = \dfrac{x - a}{|x - a|} = 1$, e para $x < a$ temos $g(x) = \dfrac{x - a}{|x - a|} = -1$, logo

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -1$$

logo os limites laterais existem e são diferentes, ou seja, g tem uma descontinuidade do tipo salto em $x = a$.

8. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$, para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $f(0) = 0$ é contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$ e descontínua em $x = 0$

   Como a função $\varphi(x) = \operatorname{sen}(x)$ é contínua na reta toda, e $\psi(x) = 1/x$ é contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$, então $f(x) = (\varphi \circ \psi)(x)$ é contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$. E no ponto $x = 0$ a função é descontínua pois

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 0$$

   enquanto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}\right) = 1.$$