2ª Prova de Análise na Reta

11/10/2018

Essa prova é composta de duas partes:

1. Entregue 4 questões resolvidas até às 17h30 (2 de derivação e 2 de integral de Riemann).
2. Enviar a resolução escaneada de todas as questões até às 24h de domingo, 14/out, para o endereço: analise.na.reta.ufpr@gmail.com.

Derivação

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que:
   a) Se existe $\delta > 0$ tal que $f|_{(a-\delta,a+\delta)}$ é crescente, então $f'(a) \geqslant 0$;
   b) Se b é ponto de máximo local de f então $f'(b) = 0$.
2. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).
   a) Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, mostre que f é uma função constante;
   b) Se f' é constante, mostre que existem $p, q \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = px + q$.
3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável no ponto $a \in \mathbb{R}$:
   a) Prove que f é contínua no ponto a;
   b) Dê um exemplo de uma função f derivável em $a \in \mathbb{R}$, tal que a derivada f' não seja contínua no ponto a.

Integral de Riemann

4. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 5$, para $x \in (a, b]$ e $f(a) = 2$. Prove que f é integrável e calcule $\int_a^b f(x)dx$.
5. Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e integrável, defina a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Mostre que F é lipschitziana, ou seja, que existe $k > 0$ tal que
$$|F(x) - F(y)| \leqslant k|x - y|, \ \forall x, y \in [a, b].$$
6. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Chamamos de parte positiva e parte negativa de f as funções $f_+, f_- : [a, b] \to \mathbb{R}$ definidas por
$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), \text{ se } f(x) \geqslant 0 \\ 0, \text{ se } f(x) < 0. \end{cases} \quad \text{e } f_-(x) = \begin{cases} -f(x), \text{ se } f(x) \leqslant 0 \\ 0, \text{ se } f(x) > 0. \end{cases}$$
   a) Mostre que $f_+ - f_- = f$ e $f_+ + f_- = |f|$;
   b) Prove que f_- e f_+ são integráveis se e somente se f é integrável.