# 2ª Prova de Análise na Reta - Gabarito

## 11/10/2018

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que:

   a) Se existe $\delta > 0$ tal que $f|_{(a-\delta,a+\delta)}$ é crescente, então $f'(a) \geqslant 0$;

Se $x \in (a-\delta, a)$ então $x - a < 0$ e $f(x) - f(a) < 0$ (pois $f$ é crescente). Logo $(f(x) - f(a))/(x - a) > 0$, para todo $x \in (a - \delta, a)$ e portanto $f'(a) = f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$.

Outra solução: Suponha, por absurdo, que $f'(a) = \lim_{x\to a}(f(x) - f(c))/(x - a) < 0$. Segue do teorema da permanência do sinal existe $\varepsilon > 0$ tal que $(f(x) - f(a))/(x - a) < 0$, para todo $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Note que podemos assumir que $\varepsilon < \delta$, assim obtemos $x_0 \in (a - \varepsilon, a)$ tal que $(f(x_0) - f(a))/(x_0 - a) < 0$. Como $x_0 < a_0$ então $f(x_0) > f(a)$, o que contradiz o fato de $f$ ser crescente em $(a - \delta, a + \delta)$

   b) Se $b$ é ponto de máximo local de $f$ então $f'(b) = 0$.

Como $b$ é ponto de máximo de $f$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leqslant f(b), \forall x \in (b - \delta, b + \delta)$. Agora:
Se $x \in (b - \delta, b)$ temos $x - b < 0$ e $f(x) - f(b) \leqslant 0$, logo $f'_-(b) = \lim_{x\to b^-}(f(x) - f(b))/(x - b) \geqslant 0$.
E para $y \in (b, b + \delta)$ temos $y - b > 0$ e $f(y) - f(b) \leqslant 0$, logo $f'_+(b) = \lim_{x\to b^+}(f(x) - f(b))/(x - b) \leqslant 0$.
Como $f$ é derivável então $f'(b) = f'_+(b) \leqslant 0$ e $f'(b) = f'_-(b) \leqslant 0$, ou seja, $f'(b) = 0$.

2. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $(a, b)$.

   a) Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, mostre que $f$ é uma função constante;

Sejam $x, y \in (a, b)$ dois pontos quaisquer. Supondo $x < y$, pelo teorema do valor médio obtém-se $c \in (x, y)$ tal que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0$. Logo, $f(y) = f(x)$, para todo $x, y \in (a, b)$.

   b) Se $f'$ é constante, mostre que existem $p, q \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = px + q$.

Como $f'$ é constante, seja $p \doteq f'(x)$. Pelo teorema do valor médio, para cada $x \in (a, b)$ fixado, existe $c \in (a, x)$ tal que $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) = p(x - a)$. Logo, $f(x) = px + [f(a) - pa]$. Chamando $q = f(a) - pa$, teremos $f(x) = px + q$, para todo $x \in (a, b)$.

Outra solução: Como $f'$ é constante, seja $p \doteq f'(x)$. Considere agora a função $g(x) = px$. Como $(f - g)' = 0$, segue do item anterior $f - g$ é constante. Logo existe $q \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) - g(x) = q$, assim $f(x) = px + q$, para todo $x \in (a, b)$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável no ponto $a \in \mathbb{R}$:

   a) Prove que $f$ é contínua no ponto $a$;

Como

$$\lim_{x\to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right] \cdot (x - a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\lim_{x\to a}(x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0,$$

então $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ e $f$ é contínua no ponto $a$.

   b) Dê um exemplo de uma função $f$ derivável em $a \in \mathbb{R}$, tal que a derivada $f'$ não seja contínua no ponto $a$.

Basta tomar $f(x) = x^2\text{sen}(1/x)$, se $x \neq 0$, e $f(0) = 0$. Para $x \neq 0$ a função $f$ é derivável, com $f'(x) = 2x\,\text{sen}(1/x) - \cos(1/x)$, e

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\text{sen}(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0} x\,\text{sen}(1/x) = 0.$$

Logo $f$ é derivável na reta toda, porém $f'$ não é contínua na origem. Para ver isso, basta ver que as sequências $x_n = (2n\pi)^{-1}$ e $y_n = (\pi/2 + 2n\pi)^{-1}$ convergem para zero, enquanto que $f'(x_n) \to -1$ e $f'(y_n) \to 0$. Logo $\lim_{x\to 0} f'(x)$ não existe.

4. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 5$, para $x \in (a,b]$ e $f(a) = 2$. Prove que $f$ é integrável e calcule $\int_a^b f(x)dx$.
Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$, então $m_1 = 2$, $M_1 = 5$ e para $j \geqslant 2$ teremos $m_j = M_j = 5$. Logo $S(f;P) - s(f;P) = 3(t_1 - t_0)$, para qualquer partição $P$.
Agora, dado $\varepsilon > 0$, seja $P$ uma partição com $t_1 - t_0 < \varepsilon/3$, então $S(f;P) - s(f;P) = 3(t_1 - t_0) < \varepsilon$. Isto prova que $f$ é integrável. Além disso, como $S(f;P) = 5(b-a)$, par toda partição $P$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \inf_P S(f;P) = 5(b-a).$$

5. Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e integrável, defina a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Mostre que $F$ é lipschitziana, ou seja, que existe $k > 0$ tal que

$$|F(x) - F(y)| \leqslant k|x-y|, \ \forall x, y \in [a,b].$$

Como $f$ é limitada, existe $k > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant k$, para todo $x \in [a,b]$. Segue das propriedades de integral que

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left|\int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt\right| = \left|\int_a^x f(t)dt + \int_y^a f(t)dt\right| \\ &= \left|\int_y^x f(t)dt\right| \leqslant \int_y^x |f(t)|dt \leqslant \int_y^x k\,dt \leqslant k|x-y|. \end{aligned}$$

6. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Chamamos de parte positiva e parte negativa de $f$ as funções $f_+, f_- : [a,b] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geqslant 0 \\ 0, & \text{se } f(x) < 0. \end{cases} \qquad \text{e } f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{se } f(x) \leqslant 0 \\ 0, & \text{se } f(x) > 0. \end{cases}$$

a) Mostre que $f_+ - f_- = f$ e $f_+ + f_- = |f|$;
Para $f(x) \geqslant 0$ temos $f_+(x) - f_-(x) = f(x) + 0 = f(x)$ e $f_+(x) + f_-(x) = f(x) + 0 = f(x) = |f(x)|$.
E para $f(x) < 0$ temos $f_+(x) - f_-(x) = 0 - (-f(x)) = f(x)$ e $f_+(x) + f_-(x) = 0 + (-f(x)) = -f(x) = |f(x)|$.
Logo, para todo $x \in [a,b]$ temos $f_+(x) - f_-(x) = f(x)$ e $f_+(x) + f_-(x) = |f(x)|$.

b) Prove que $f_-$ e $f_+$ são integráveis se e somente se $f$ é integrável.
Supondo que $f_-$ e $f_+$ são integráveis, como a soma de funções integráveis é integrável então $f = f_+ - f_-$ é integrável. Por outro lado, supondo que $f$ é integrável, temos também que $|f|$ é integrável. Como $f_+ = \dfrac{|f| + f}{2}$ e $f_- = \dfrac{|f| - f}{2}$, segue que $f_+$ e $f_-$ são integráveis.