3ª Prova de Análise na Reta

27/11/2018

$\diamond$ Entregue 5 questões resolvidas até às 17h30 $\diamond$

1. Seja $g : [c, d] \to [a, b]$ uma função de classe C^1 e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que a seguinte fórmula de mudança de variáveis é válida:
$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt.$$

2. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existe $c \in [a, b]$ tal que
$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b - a).$$

3. Usando a definição de logaritmo a partir da integral da função $1/t$ prove que:
   a) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$, para todo $x, y > 0$;
   b) $\log(x^k) = k \log(x)$, para todo $x > 0$ e $k \in \mathbb{Z}$.

4. Fixado α real, considere a função $f_\alpha : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f_\alpha(x) = 1/x^\alpha$, para $x \neq 0$. Calcule as seguintes integrais impróprias:
   a) $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(x)dx$; b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx$

5. Considere a função definida pela série $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}$.
   a) Mostre que f está bem definida na reta toda;
   b) Calcule a derivada de f e a integral $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

6. Considere a série de potências $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$.
   a) Encontre o raio de convergência desta série;
   b) Determine o intervalo de convergência (não esqueça dos extremos do intervalo)

7. Suponha que $\lim a_n = L \neq 0$ e considere a função $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Mostre que:
   (a) a série acima tem raio de convergência $R = 1$;
   (b) $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, para todo $x \in (0, 1)$;
   (c) a série do item (b) acima também possui raio de convergência $R = 1$.