3ª Prova de Análise na Reta

27/11/2018

⋄ Entregue 5 questões resolvidas até às 17h30 ⋄

1. Seja $g : [c, d] \to [a, b]$ uma função de classe C^1 e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que a seguinte fórmula de mudança de variáveis é válida:

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt.$$

Como f é contínua, pelo Teorema Fundamental do Cálculo ela possui uma primitiva $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, logo

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(t)dt = F(g(d)) - F(g(c)). \qquad (*)$$

Pela regra da cadeia, $(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$, para $t \in [c, d]$. Isso significa que $(F \circ g)$ é uma primitiva de $(f \circ g)g'$. Logo

$$\int_c^d f(g(t))g'(t)dt = (F \circ g)(d) - (F \circ g)(c) = F(g(d)) - F(g(c)). \qquad (**)$$

De (*) e (**) segue o resultado.

2. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b - a).$$

Sejam $m = \inf\{f(x); a \le x \le b\}$ e $M = \sup\{f(x); a \le x \le b\}$, então $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a, b]$.
Multiplicando $m \le f(x) \le M$ por $1/(b - a) > 0$ e integrando no intervalo $[a, b]$ teremos

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b m\, dx \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{1}{b-a}\int_a^b M\, dx = M.$$

Como a função $F(x) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^x f(x)dx$ é contínua no intervalo $[a, b]$, segue do teorema do valor intermediário existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

3. Usando a definição de logaritmo a partir da integral da função $1/t$ prove que:

   a) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$, para todo $x, y > 0$;

$$\log(xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^{x} \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} \stackrel{(\star)}{=} \int_1^{x} \frac{dt}{t} + \int_1^{y} \frac{dz}{z} = \log(x) + \log(y)$$

em $(\star)$ fizemos a mudança de variáveis $xz = t$, assim $xdz = dt$ e $1 \leq z \leq y$.

   b) $\log(x^k) = k\log(x)$, para todo $x > 0$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Pelo item anterior temos $\log(2x) = \log(x+x) = \log(x)+\log(x) = 2\log(x)$, para todo $x > 0$. Segue, por indução matemática, que $\log(x^n) = n\log(x)$, para todo $x > 0$ e n natural. Para $n = 0$ temos $\log(x^0) = \log(1) = 0 = 0\log(x)$, para todo $x > 0$. Finalmente, como

$$\log(x^{-n}) + \log(x^n) = \log(x^{-n}x^n) = \log(1) = 0$$

então, para todo n natural, $\log(x^{-n}) = -\log(x^n) = -n\log(x)$. Daqui segue que $\log(x^n) = n\log(x)$, para $x > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$.

4. Fixado α real, considere a função $f_\alpha : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f_\alpha(x) = 1/x^\alpha$, para $x \neq 0$. Calcule as seguintes integrais impróprias:

   a) $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(x)dx$;

Para $\alpha = 1$ temos $\displaystyle\int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\log(x)\Big|_\epsilon^1 = -\lim_{\epsilon\to 0}\log(\epsilon) = +\infty$.

E para $\alpha \neq 1$ temos

$$\int_0^1 f_\alpha(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\epsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

   b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx$

Para $\alpha = 1$ temos $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_1(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{1}{x}dx = \lim_{A\to\infty}\log(x)\Big|_1^A = \lim_{A\to\infty}\log(A) = +\infty$.

E para $\alpha \neq 1$ temos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{A\to\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^A = \lim_{A\to\infty}\left[\frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right] = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

5. Considere a função definida pela série $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}$.

   a) Mostre que f está bem definida na reta toda;

Como $\left|\text{sen}(nx)/n^2\right| \leq 1/n^2$, para todo x, e a série numérica $\sum 1/n^2$ converge, segue do teste M de Weierstrass que a série $\sum \text{sen}(nx)/n^2$ é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$. Em particular, f está bem definida na reta toda.

b) Calcule a derivada de f e a integral $\int_0^1 f(x)dx$.

Como a série $\sum \operatorname{sen}(nx)/n^2$ é uniformemente convergente na reta, então ela pode ser derivada termo a termo em qualquer ponto, e integrada termo a termo em qualquer intervalo compacto da reta, assim

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(nx)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$$

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\cos(nx)}{n^3}\Big|_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(n)}{n^3}$$

6. Considere a série de potências $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$.

   a) Encontre o raio de convergência desta série;

Como $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \lim \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim \frac{n^2}{n^2(1+1/n)^2} = \lim \frac{1}{(1+1/n)^2} = 1$, então o raio de convergência é $R = 1$.

   b) Determine o intervalo de convergência (não esqueça dos extremos do intervalo)

Como o raio de convergência é $R = 1$, a série converge no intervalo aberto $(1, 3)$. Agora, para $x = 1$ e $x = 3$ as séries numéricas $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ e $\sum \frac{(1)^n}{n^2}$ convergem, logo o intervalo de convergência de $f(x)$ é $[1, 3]$.

7. Suponha que $\lim a_n = L \neq 0$ e considere a função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Mostre que:

   (a) a série acima tem raio de convergência $R = 1$;

Como $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\lim |a_{n+1}|}{\lim |a_n|} = \frac{|L|}{|L|} = 1$, então o raio é $R = 1$.

   (b) $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, para todo $x \in (0, 1)$;

Como a série $\sum a_n x^n$ converge uniformemente no intervalo $[0, x]$, para cada $x \in (0, R)$, então podemos integrá-la termo a termo obtendo

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

   (c) a série do item (b) acima também possui raio de convergência $R = 1$.

Note que o termo geral da série do item (b) é $A_n = \frac{a_n}{n+1}$. Como

$$\lim \left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}/(n+1)}{a_n/n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{n}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

então o raio de convergência desta série também é igual a 1.