# Lista de Exercícios – Fundamentos de Análise

26/03/2018

1. Dados $a = 2,2585858... = 2,2\overline{58}$ e $b = 0,494949... = 0,\overline{49}$,
   escreva a representação decimal de $a + b$. Justifique seus argumentos.

2. Usando apenas o teorema que caracteriza a representação decimal de um número racional, justifique porque essas expressões estão erradas.

   (a) $\frac{29}{31} = 0,9354838$
   (b) $\frac{36}{75} = 0,484848\ldots$
   (c) $\frac{51}{9} = 5,667\,667\,667\ldots$
   (d) $\frac{77}{385} = 0,198\,999\,696\,696\ldots$
   (e) $\frac{141}{7} = 20,142\,857\,369\,142\,857\,369\ldots$

   Obs.: Fazer as contas e dizer qual é o resultado correto de uma expressão não serve como resposta para este exercício.

3. Defina número irracional e use sua definição para construir um número irracional maior que $1,41421358$ e menor que $1,414214$.

4. Mostre que o conjunto dos números irracionais não é fechado em relação a nenhuma das quatro operações fundamentais;

5. Sejam $r$ um número racional e $\alpha$ um número irracional, verifique se são racionais ou irracionais os seguintes números: $r + \alpha$, $r \cdot \alpha$, $r/\alpha$ e $\sqrt[n]{\alpha}$.

6. Seja $n$ um número natural qualquer. Prove que $\sqrt{n}$ é um número racional se, e somente se, $n$ é um quadrado perfeito.

7. Dados $a, b, \in \mathbb{N}$, use o princípio de indução para mostrar que $a < b \Rightarrow a \cdot k < b \cdot k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

8. Dados $a, b, \in \mathbb{N}$, com $a < b$, mostre que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a \cdot k > b$.

9. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, tais que $a > b$. Use o exercício anterior e o princípio da boa ordenação para mostrar que existem $q$ e $r$ naturais, $0 \leq r < b$, tais que $a = b \cdot q + r$.

10. Dado $X \subset \mathbb{N}$ arbitrário, prove que $X$ é finito se, e somente se, $X$ é limitado.

11. Seja $X \subset \mathbb{N}$ um subconjunto infinito. Mostre que existe $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\} \subset X$ tal que $y_j > j^2$, para $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

12. Mostre que todo conjunto infinito possui um subconjunto enumerável.

13. Prove que o conjunto dos números racionais é enumerável.

14. Seja $\mathcal{P}$ o conjunto dos números primos:

    (a) Mostre que $\mathcal{P}$ é um conjunto infinito;
    (b) Mostre que $\mathcal{P}$ é um conjunto enumerável.

15. Sejam $X$ um conjunto finito e $Y$ um conjunto infinito. Construa uma função injetiva
    $f : X \to Y$ e uma função sobrejetiva $g : Y \to X$.