1^{a} Prova de Análise no $\mathbb{R}^n$ – 30/4/2019 - GABARITO

1. Considere o conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (y + x^2)(x + 1) = 0\}$. (1,5 ponto)

   (a) E é aberto?

   Não. Por exemplo, $0 \in E \setminus \text{int}E$, pois $(0, \frac{r}{2}) \in B(0, r) \setminus E$, $\forall r > 0$.

   (b) E é fechado?

   Sim, pois $E = f^{-1}(\{0\})$ é imagem inversa de um fechado pela função contínua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (y + x^2)(x + 1)$.

   (c) E é compacto?

   Não, pois não é limitado. Para cada $k > 0$ dado, temos $(-1, k) \in E$ e $\|(-1, k)\| = (1 + k^2)^{1/2} > k$.

   (d) E é convexo?

   Não, pois $(-1, 0)$ e $(0, 0)$ pertencem a E e o segmento de reta $S = [\![(-1, 0), (0, 0)]\!]$ não está contido em E. De fato, $(-1/2, 0) \in S$ e $(-1/2, 0) \notin E$.

   (e) E é conexo?

   Sim, pois E é a reunião de dois conjuntos conexos (gráficos da reta $x = -1$ e da parábola $y = -x^2$) que possuem o ponto $p = (-1, -1)$ em comum.

   (f) Se $p \in \mathbb{R}^2$, quantas componentes conexas possui $E \setminus \{p\}$?

   - se $p \notin E$ então $E \setminus \{p\} = E$ possui apenas uma componente conexa, pois E é conexo.
   - se $p \in E$ e $p \neq \{(-1, -1)\}$ então $E \setminus \{p\}$ possui duas componentes conexas.
   - se $p = (-1, -1)$, então $E \setminus \{(1, 1)\}$ possui quatro componentes conexas.

2. Seja $T \in L(\mathbb{R}^n)$ um operador linear qualquer e $I \in L(\mathbb{R}^n)$ a identidade. Mostre que: (2,0 pontos)

   (a) Se $\|T - I\| < 1$ então T é invertível;

   Se $Tu = 0$, então $\|u\| = \|u - Tu\| = \|(T - I)(-u)\| \leqslant \|T - I\|\|u\|$. Como $\|T - I\| < 1$ então $\|u\| = 0$. Logo $\ker(T) \neq \{0\}$ e $T \in L(\mathbb{R}^n)$ é injetivo. Daqui segue que T é invertível.

   (Outra solução) Se T não fosse invertível então não seria injetivo ($\ker(T) \neq \{0\}$). Logo existiria $u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ unitário tal que $Tu = 0$, e portanto

   $$\|(T - I)u\| = \|Tu - u\| = \| - u\| = 1 > \|T - I\| = \sup_{\|v\|=1} \|(T - I)v\|. \text{ (contradição)}$$

   (b) Se existe $\mu > 0$ tal que $\|Tx\| \geqslant \mu\|x\|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então T é invertível e $\|T\| \leqslant \mu^{-1}$.

   A primeira desigualdade garante que o operador linear $T \in L(\mathbb{R}^n)$ é injetivo, logo T é sobrejetivo e portanto invertível.

   Para provar a desigualdade, dado $u \in \mathbb{R}^n$ unitário, seja $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $T^{-1}v = u$. Então

   $$\|T^{-1}v\| = \|u\| \leqslant \mu^{-1}\|Tu\| = \mu^{-1}\|v\| = \mu^{-1}.$$

   Logo μ^{-1} é uma cota superior para $\{\|T^{-1}v\|; \|v\| = 1\}$, ou seja, $\|T^{-1}\| = \sup_{\|v\|=1} \|T^{-1}v\| \leqslant \mu^{-1}$.

3. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto arbitrário: (2,5 pontos)

   (a) Se K não é compacto, mostre que existe uma função contínua não limitada $f : K \to \mathbb{R}$;

   Como K não é compacto, então K não é limitado ou não é fechado. No caso em que K não é limitado, basta tomar $f(x) = \|x\|$, $x \in K$, e no caso em que K não é fechado, basta tomar $a \in \overline{K} - K$ e definir $f(x) = \|x - a\|^{-1}$, $x \in K$. Assim ambas as funções estão bem definidas e são ilimitadas.

   (b) Se K é compacto e $f : K \to \mathbb{R}^m$ contínua, mostre que $f(K)$ é compacto;

   Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma cobertura aberta de $f(K)$. Como f é contínua, cada $f^{-1}(A_\lambda)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, e portanto $\{f^{-1}(A_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ é uma cobertura aberta do compacto K. Logo existem $\lambda_1, \dots \lambda_\ell \in \Lambda$ tais que $K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} f^{-1}(A_{\lambda_j})$. Daqui segue que $f(K) \subset f\left(\bigcup_{j=1}^{\ell} f^{-1}(A_{\lambda_j})\right) \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} A_{\lambda_j}$, ou seja, $f(K)$ é compacto.

   (c) Se K é compacto e $f : K \to \mathbb{R}^m$ é contínua, mostre que f é uniformemente contínua.

   Suponha, por absurdo, que f não é unif. contínua, então existem $\varepsilon > 0$ e sequências (x_n) e (y_n) em K tais que $\lim(x_n - y_n) = 0$ e $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geqslant \varepsilon$, para $n \in \mathbb{N}$. Como K é compacto, então (x_n) é limitada, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $\lim(x_n) = a$. Analogamente $\lim(y_n) = a$. Segue da continuidade de f em a que $\lim(f(x_n) - f(y_n)) = f(a) - f(a) = 0$ (contradição).

4. Seja $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em $\mathbb{R}^n$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes: (1,5 ponto)

   (a) $\lim_{k\to\infty} |x_k| = +\infty$;

   (b) (x_k) não possui subsequência convergente;

   (c) Qualquer conjunto limitado $B \subset \mathbb{R}^n$ contém apenas uma quantidade finita de termos da sequência (x_k).

   (a) $\Rightarrow$ *(b)* Se (x_k) tivesse uma subsequência convergente $(x_{k'})_{k'\in\mathbb{N}}$, existiria $A > 0$ tal que $|x_{k'}| \leqslant A$, para todo $k' \in \mathbb{N}$, pois a subsequência seria limitada. Isso implicaria que $|x_k| \not\to +\infty$;

   (b) $\Rightarrow$ *(c)* Se algum conjunto limitado $B \subset \mathbb{R}^n$ contivesse uma infinidade de termos de (x_k), pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, poderíamos extrair uma subsequência convergente (x_{n_k}) dos termos de (x_n) que estão em B.

   (c) $\Rightarrow$ *(a)* Se $|x_k| \not\to +\infty$, então existe $A > 0$ e uma infinidade de índices $k' \in \mathbb{N}$ tais que $|x_{k'}| \leqslant A$, ou seja, a bola $B[0; A] \subset \mathbb{R}^n$ contém uma infinidade de termos da sequência (x_k).

5. Sejam $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| = 1\}$ e $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = 1\}$. Mostre que: (1,0 ponto)

   (a) $\mathbb{S}^1$ não homeomorfo a nenhum subconjunto de $\mathbb{R}$;

   Suponha $\varphi : \mathbb{S}^1 \to A \subset \mathbb{R}$ é um homeomorfismo. Como $\mathbb{S}^1$ é compacto e conexo, então $A = [a, b]$, para algum $a, b \in \mathbb{R}$. Seja $p = (a + b)/2$ é o ponto médio de A então: $A - \{p\}$ tem duas comp. conexas, $\mathbb{S}^1 - \{\varphi(p)\}$ tem apenas uma comp. conexa e estes dois conjuntos são homeomorfos (contradição).

   (b) $\mathbb{S}^1$ não homeomorfo a $\mathbb{S}^2$.

   Suponha que exista um homeomorfismo $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ e tomemos $p \neq q$ em $\mathbb{S}^1$. Então $\mathbb{S}^1 - \{p, q\}$ é homeomorfo a $\mathbb{S}^2 - \{\varphi(p), \varphi(q)\}$, o que é uma contradição, pois $\mathbb{S}^1 - \{p, q\}$ tem duas comp. conexas e $\mathbb{S}^2 - \{\varphi(p), \varphi(q)\}$ tem apenas uma comp. conexa.

6. Seja A um subconjunto de de $\mathbb{R}^n$. Mostre que: (1,5 pontos)

(a) se $A \neq \varnothing$ é aberto e conexo então é A é conexo por caminhos (c.p.c.);

Dado $a \in A$, seja $X_a = \{x \in A; \exists \alpha : [0,1] \to A$ conectando a e $x\}$. Como $a \in X_a$ então $X_a \neq \varnothing$. Vamos provar que X_a é aberto e fechado em A, portanto $X_a = A$. Assim A será conexo por caminhos, pois se x e y estão em A, então existe um caminho $\alpha : [0,1] \to A$ conectando a e x, e um caminho $\beta : [0,1] \to A$ conectando a e y. Logo a justaposição de caminhos $\beta * \alpha^{-1}$ conecta x e y.

Para provar que X_a é aberto, dado $x_0 \in \overline{X}_a$, seja $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset A$. Como todo ponto $x \in B(a, \delta)$ pode ser conectado ao centro por um caminho retilíneo e o centro da bola pode ser conectado ao ponto a, por justaposição de caminhos qualquer ponto desta bola pode ser conectado ao ponto a, ou seja, $B(a, \delta) \subset X_a$.

Para provar que X_a é fechado, dado $x_0 \in \overline{X}_a \cap A$, seja $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset A$. Como $x_0 \in \overline{X}_a$ então existe $x \in B(a, \delta) \cap X_a$. Agora basta tomar o caminho que conecta a e x e justapor ao caminho retilíneo que conecta x ao centro da bola para obter um caminho conectando a e x_0, ou seja, $x_0 \in \overline{X}_a$ e $\overline{X}_a \cap A \subset X_a$.

(b) se A é c.p.c. e $f : A \to \mathbb{R}^m$ é contínua, então $f(A)$ é c.p.c.

Sejam $f(a), f(b) \in f(A)$ dois pontos quaisquer. Como A é c.p.c., existe um caminho $\alpha : [0,1] \to A$ tal que $\alpha(0) = a$ e $\alpha(1) = b$. Logo $(f \circ \alpha) : [0,1] \to f(A)$ é um caminho conectando $(f \circ \alpha)(0) = f(a)$ e $(f \circ \alpha)(1) = f(b)$, ou seja, $f(A)$ é c.p.c.