

1ª Prova de Análise na Reta

27/08/2018

Essa prova é composta de duas partes:

1. Entregue 4 questões resolvidas até às 21h. Faça duas questões de topologia e duas de limites/continuidade.
2. Enviar a resolução de todas as questões até às 24h de 9/set (segunda-feira) para o endereço: analise.na.reta.ufpr@gmail.com

Topologia da Reta

1. Escreva a definição precisa de cada uma das afirmações abaixo e dê dois exemplos diferentes para cada uma delas. É permitido usar caracterizações por intervalos ou sequências; e os exemplos devem ter justificativas baseadas em sua definição.
 - (a) $b \in \mathbb{R}$ não é ponto aderente ao conjunto $B \subset \mathbb{R}$;
 - (b) $A \subset \mathbb{R}$ não é um conjunto aberto;
 - (c) $C \subset \mathbb{R}$ não é um conjunto compacto.
2. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto e $a \in A$. Prove que:
 - (a) a é ponto de acumulação do conjunto A ;
 - (b) Se $\lim x_n = a$ então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$, para todo $n \geq n_0$.
3. Sejam $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}$ dois conjuntos fechados.
 - (a) Usando apenas as definições de ponto aderente e conjunto fechado, mostre que $B_1 \cap B_2$ é fechado.
 - (b) Sabendo que B_1 também é limitado, mostre que $B_1 \cap B_2$ é compacto.

Limites e Continuidade

4. Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, $a \in D'$ e $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Mostre que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.
5. Escreva a definição precisa de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$. A seguir use sua definição para provar que
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$
6. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto $a \in \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto $b = f(a)$. Prove que a função composta $g \circ f$ é contínua no ponto a .
7. Dada $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ contínua, mostre que existe $a \in [0, 1]$ tal que $f(a) = 1 - a$.