1ª Prova de Fundamentos de Análise - Noite

11/04/2019

Entregue 4 questões resolvidas até às 21h. Faça uma questão de cada seção e a quarta da seção que você preferir.

Números Naturais e Inteiros

1. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Usando apenas os axiomas de Peano e as definições de adição e multiplicação de números naturais mostre que
   (a) Se $a \cdot b = 0$, prove que $a = 0$ ou $b = 0$;
   (b) se $a + b = 0$, prove que $a = 0$ e $b = 0$.
2. Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$. Prove que:
   (a) Se a e b são não nulos então $a \leqslant ab$;
   (b) Se $a \leqslant b$ então $ac \leqslant bc$
3. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, tais que $a > b > 0$.
   (a) Mostre que existe $u \in \mathbb{N}$ tal que $bu > a$;
   (b) mostre que existem $q, r \in \mathbb{N}$, tais que $a = bq + r$ e $0 \leqslant r < b$.

Números Racionais e Irracionais

4. Seja r um número racional e α e um número irracional tais que $0 < r < \alpha$.
   (a) Encontre um número racional a entre 0 e r;
   (b) Encontre um número irracional β entre r e α;
   (c) Encontre um número racional b entre r e α.
   (d) Encontre um número irracional γ entre 0 e r.

   Justifique porque os números que você encontrou são de fato racionais/irracionais.
5. Seja a/b a forma irredutível de um número racional.
   (a) Se a representação decimal de a/b possui uma quantidade finita de casas decimais, mostre que na decomposição de b em fatores primos aparecem apenas os fatores 2 e 5.
   (b) Prove que a recíproca do item anterior também é verdadeira.

Conjuntos finitos e enumeráveis

6. Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto. Mostre que X é finito se, e somente se, X é limitado.

7. Seja $P \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos números pares e $Q \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos quadrados perfeitos.

   (a) Mostre que os conjuntos P e Q são infinitos e enumeráveis;

   (b) Construa uma bijeção entre P e Q

8. Mostre que o conjunto dos números primos é infinito e enumerável.