1ª Prova de Análise na Reta

05/09/2019

Essa prova é composta de duas partes:

1. Entregue 4 questões resolvidas até às 17h30. Faça duas questões de topologia e duas de limites/continuidade.
2. Enviar a resolução de todas as questões até às 24h de 9/set (segunda-feira) para o endereço: analise.na.reta.ufpr@gmail.com

Topologia da Reta

1. Escreva a definição precisa de cada uma das afirmações abaixo e dê dois exemplos diferentes para cada uma delas. É permitido usar caracterizações por intervalos ou sequências; e os exemplos devem ter justificativas baseadas em sua definição.
   (a) $a \in \mathbb{R}$ não é ponto interior do conjunto $A \subset \mathbb{R}$;
   (b) $b \in \mathbb{R}$ não é ponto de acumulação do conjunto $B \subset \mathbb{R}$;
   (c) $C \subset \mathbb{R}$ não é um conjunto compacto.
2. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto e $a \in A$. Prove que:
   (a) a é ponto de acumulação do conjunto A;
   (b) $A - \{a\}$ é aberto.
3. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado não vazio e $a = \inf X$.
   a. Prove que a é um ponto aderente a X;
   b. Dê um exemplo no qual a não seja ponto de acumulação de X.

Limites e Continuidade

4. Sabendo que $\lim_{x \to a} f(x) = 2$, mostre que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 1$, para todo $x \in V'_\delta(a)$.
5. Escreva a definição precisa de $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. A seguir use sua definição para provar que
$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 1) = +\infty.$$
6. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $f(0) = 0$ é contínua.
7. Seja $f : [0, \pi/2] \to [0, \pi/2]$ uma função contínua. Mostre que existe $a \in [0, \pi/2]$ tal que
$$f(a) = \frac{\pi}{2}\text{sen } a.$$