

1ª Prova de Fundamentos de Análise

11/04/2019

Entregue 4 questões resolvidas até às 17h30. Faça uma questão de cada seção e a quarta da seção que você preferir.

Números Naturais e Inteiros

Use apenas os axiomas de Peano, as definições de adição, multiplicação e relação de ordem em \mathbb{N} , e resultados vistos em sala para resolver as questões desta seção.

1. Sejam $a, b, c, n \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$. Defina a exponenciação de base a pondo:

$$a^1 = a \quad \text{e} \quad a^{n+1} = a^n a, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prove que:

(a) $a^b a^c = a^{b+c}$;

(b) $(a^b)^c = a^{bc}$.

2. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Prove que:

(a) Se $a < b$ então $a^n < b^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Se a e b são não nulos então $a \leq ab$;

3. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, tais que $a > b > 0$.

(a) Mostre que existe $u \in \mathbb{N}$ tal que $bu > a$;

(b) mostre que existem $q, r \in \mathbb{N}$, tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < b$.

Números Racionais e Irracionais

4. Sejam α e β números irracionais e r um número racional. Verifique se os seguintes números são racionais ou irracionais:

(a) $\alpha + \beta$

(b) $r\alpha$

(c) $1/\alpha$

(d) $\sqrt{\alpha}$

(e) \sqrt{r} .

5. Seja a/b a forma irredutível de um número racional.

(a) Se a representação decimal de a/b possui uma quantidade finita de casas decimais, mostre que na decomposição de b em fatores primos aparecem apenas os fatores 2 e 5.

(b) Prove que a recíproca do item anterior também é verdadeira.

Conjuntos finitos e enumeráveis

6. Sejam X um conjunto finito e Y um conjunto infinito. Construa uma função $f : X \rightarrow Y$ injetiva e uma função $g : Y \rightarrow X$ sobrejetiva.
7. Mostre que todo conjunto infinito tem um subconjunto enumerável.
8. Sejam X e Y dois conjuntos infinitos enumeráveis.
 - (a) Mostre que o produto cartesiano $X \times Y$ é enumerável;
 - (b) Use o item anterior para provar que o conjunto dos números racionais é enumerável.