2ª Prova de Fundamentos de Análise - Noite

23/05/2019

Entregue 4 questões resolvidas até às 21h.

1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $a, b \in \mathbb{K}$.

   (a) Se $a, b \geqslant 0$ então $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$;

   (b) Se $a < 1$ então $(1-a)^n \geqslant 1 - na$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
   (deixe claro em que ponto a hipótese $a < 1$ foi usada)

2. Sejam $A, B \subset [0, +\infty)$ conjuntos limitados não vazios e defina $AB = \{ab; a \in A \text{ e } b \in B\}$. Mostre que:

   (a) AB é um conjunto limitado

   (b) $\sup(AB) \leqslant (\sup A)(\sup B)$;

3. Seja (x_n) uma sequência convergente com limite L. Prove que:

   (a) se $L \neq 0$ apenas um número finito de termos desta sequência podem ser nulos;

   (b) $\lim |x_n| = |L|$.

4. Sabendo que (x_n) é uma sequência limitada e $\lim y_n = +\infty$, verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas:

   (a) $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = 0$;

   (b) $\lim(x_n y_n) = +\infty$.

   Obs.: quando uma afirmação for verdadeira é necessário demonstrá-la; caso seja falsa, apresente um contra-exemplo.

5. Faça o que se pede.

   (a) Defina sequência de Cauchy;

   (b) Mostre que toda sequência de Cauchy é limitada.

6. Fixado $a > 1$, defina

$$x_1 = a \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \frac{1}{a + x_n}.$$

   (a) Usando o método das aproximações sucessivas, prove que (x_n) converge;

   (b) Calcule o limite de (x_n).