2ª Prova de Análise na Reta

17/10/2019

Essa prova é composta de duas partes:

1. Entregue 4 questões resolvidas até às 17h30 (2 de derivação e 2 de integração).
2. Enviar a resolução escaneada de todas as questões até às 24h de domingo, 20/out, para o endereço: analise.na.reta.ufpr@gmail.com.

Derivação

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável:
   a) Se $c \in (a, b)$ é um ponto de ponto de máximo local de f, mostre que $f'(c) = 0$;
   b) Se existir $\alpha > 1$ tal que $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^\alpha$, para todo, mostre que f é constante.
2. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).
   a) Se $f'(x) = 0$, para $x \in \mathbb{R}$, mostre que f é constante;
   b) Se $f'(x) < 0$, para $x \in (a, b)$, mostre f é decrescente.
3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^5 + 2x^3 + 4x - 3,\ x \in \mathbb{R}$.
   a) Use o teorema do valor intermediário para provar que f possui uma raiz real;
   b) Use o teorema do valor médio para provar que f possui uma única raiz real.

Integral de Riemann

4. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x$, para $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, e $f(x) = 2$, para $x \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Prove que f não é integrável.
5. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não negativa. Prove (sem usar o teorema do valor médio para integrais) que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

6. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere a função $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt,\ x \in [a, b]$.
   a) Mostre que F é derivável em $[a, b]$ com $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$;
   b) Prove que a função $G(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)dt$, $x \in [a, b]$, satisfaz $G' = -f$.