2ª Prova de Fundamentos de Análise - Tarde

23/05/2019

Entregue 4 questões resolvidas até às 17h30.

1. Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, mostre que:
   (a) $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$;
   (b) Se $a > 0$ e $a + b > 0$ então $(a+b)^n \geqslant a^n + na^{n-1}b$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
   Importante: deixe claro em que ponto as hipóteses acima foram usadas.

2. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos limitados não vazios e defina $A + B = \{a + b; a \in A \text{ e } b \in B\}$. Mostre que:
   (a) $A + B$ é um conjunto limitado
   (b) $\sup A + \sup B \geqslant \sup(A + B)$;

3. Suponha que $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$. Mostre que:
   (a) $\forall \varepsilon > 0, |a - b| \geqslant 1 - \varepsilon \Rightarrow |a - b| \geqslant 1$;
   (b) se $|x_n - y_n| \geqslant 1$, para todo n natural, então $|a - b| \geqslant 1$

4. Se (x_n) é uma sequência limitada e $\lim y_n = +\infty$, mostre que:
   (a) $\lim(x_n + y_n) = +\infty$;
   (b) $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = 0$.

5. Seja (x_n) uma sequência de números reais. Mostre que:
   (a) se (x_n) é convergente então (x_n) é de Cauchy;
   (b) se (x_n) é de Cauchy então (x_n) é limitada.

6. Fixado $a > 0$, defina
$$x_1 = a \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$
   (a) Usando o método das aproximações sucessivas, prove que (x_n) converge;
   (b) Calcule o limite de (x_n).