3ª Prova de Análise na Reta - Noite

21/11/2019

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua não identicamente nula tal que

$$f(x+y) = f(x)f(y), x, y \in \mathbb{R}.$$

Mostre que:

a) $f(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

b)$f(0) = 1$

c) $f(-x) = 1/f(x)$;

d) $f(nx) = (f(x))^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

e) $f(px) = (f(x))^p$, para todo $p \in \mathbb{Z}$;

f) $f(x/q) = (f(x))^{1/q}$, para todo $q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$;

g) $f(x^r) = rf(x)$, para todo $r \in \mathbb{Q}$.

h) Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{ax}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Verifique se as integrais abaixo são convergentes. Em caso afirmativo, calcule o valor.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$; b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx$.

3. Considere a sequência de funções $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}, x \in \mathbb{R}_+ \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

a) Verifique que a sequência (f_n) converge pontualmente e encontre a função limite;

b) Prove que a sequência (f_n) não converge uniformemente.

4. Considere a função $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}(x-3)^n$.

a) Calcule o raio de convergência desta série;

b) Determine o intervalo máximo de convergência;

c) Calcule a derivada $f'(x)$ e a integral $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$. (justifique os seus cálculos)