3ª Prova de Análise na Reta - Tarde

21/11/2019

1. Considere a função $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$, definida para $x \in (0, +\infty)$. Mostre que
   a) f está bem definida, é crescente e contínua;
   b) $f(1) = 0$, $f(x) > 0$, se $x > 1$, e $f(x) < 0$, se $0 < x < 1$.
   c) $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$, para todo $x, y > 0$;
   d) $f(x^r) = rf(x)$, para todo $x > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$.

2. Uma função positiva integrável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada densidade de probabilidade quando $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Neste caso, a probabilidade de t estar compreendido entre a e b é

$$P_{(a,b)}(t) = \int_a^b f(x)dx.$$

   Fixado $\alpha > 0$, considere a função $f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & \text{se } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$
   a) Mostre que f é uma densidade de probabilidade;
   b) Calcule $P_{(0,1)}(t)$ e $P_{(1,+\infty)}(t)$.

3. Considere a sequência de funções $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, definida por

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}, \text{ para } x \geqslant 0.$$

   (a) Verifique que (f_n) converge simplesmente e encontre a função limite;
   (b) Prove que (f_n) não converge uniformemente.

4. Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}(x-2)^n$, com $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Encontre o raio de convergência desta série;
   (b) Determine o intervalo máximo de convergência

5. Suponha que $\lim a_n = L \neq 0$ e considere a função $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Mostre que:
   (a) a série acima tem raio de convergência $R = 1$;
   (b) $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, para todo $x \in (0, 1)$;
   (c) a série do item acima também possui raio de convergência $R = 1$.