CAPÍTULO IV

OS NÚMEROS RACIONAIS

1. Introdução

Sempre que a divisão de um inteiro por outro não era exata, os egípcios antigos, já por volta do ano 2000 a.C., usavam frações para exprimir o resultado. E usavam também frações para operar com seu sistema de pesos e medidas.

Contudo, por razões difíceis de explicar, com exceção das frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, às vezes, os egípcios usavam apenas *frações unitárias*, ou seja, frações cujo numerador é 1. Por exemplo, no problema 24 do papiro Rhind (cerca de 1700 a.C.) no qual o escriba pede que se efetue a divisão de 19 por 8, a resposta é dada, usando a nossa notação, por:

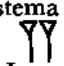
$$2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

Embora os egípcios não adotassem sempre o mesmo procedimento, pode-se mostrar que toda fração entre 0 e 1 é soma de frações unitárias, o que representa uma garantia teórica para essa opção.

Aliás, o uso das frações unitárias, além de não ficar confinado ao Egito antigo, se estendeu por vários séculos. Basta dizer que Fibonacci, no seu já citado *Liber abaci*, escrito no século XIII d.C. (cap. II, item 11), não só as usava como fornecia tabelas de conversão das frações comuns para unitárias. É que, embora uma das finalidades dessa obra fosse divulgar os numerais indo-arábicos e a notação decimal posicional, Fibonacci não chegou a perceber a grande vantagem deste sistema: sua aplicabilidade para exprimir frações. Por exemplo:

$$\frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Mas convém registrar que os babilônios, 2 000 anos antes de Cristo, apesar de algumas ambigüidades, decorrentes de não contarem com um símbolo para o zero e outro para a separatriz, conseguiram estender o princípio posicional às frações no seu sistema de base 60. Por exemplo, o numeral



que, como já vimos no capítulo I, poderia representar o inteiro $1 + 1 \cdot 60 = 61$, também poderia ser uma representação de

$$1 + \frac{1}{60}$$

Na verdade o uso da *forma decimal* para representar frações, tal como em $\frac{1}{4} = 0{,}25$, somente começaria a vingar após a publicação, em 1585, de um pequeno texto de Simon Stevin (1548-1620) intitulado *De thiende* (O décimo). Embora a essa altura a forma decimal já não constituísse uma novidade para os especialistas, esse trabalho de Stevin alcançou grande popularidade e conseguiu seu intento, que era ensinar a "como efetuar, com facilidade nunca vista, todos os cálculos necessários entre os homens, por meio de inteiros sem frações". A notação inicialmente usada por Stevin acabou sendo melhorada com o emprego da vírgula ou do ponto como separatriz decimal, conforme sugestão de John Napier (1550-1617), feita em 1617.

2. A divisão em $\mathbb{Z}$

Sejam a, b $\in \mathbf{Z}$, b $\neq$ 0. Se a é múltiplo de b, então existe um único c $\in \mathbf{Z}$ de maneira que a = bc. Este elemento c é chamado *quociente* de a por b e costuma ser indicado por:

$$c = \frac{a}{b} \text{ ou } c = a : b$$

A operação que a cada par (a, b), nas condições expostas, associa c = a : b é a *divisão em* **Z**. Portanto a divisão em **Z** só está definida em

$$\{(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : b \neq 0 \text{ e } b \mid a\}$$

Mas certas questões corriqueiras ao homem há milênios, como a citada no item anterior de dividir 19 por 8, embora envolvendo só números inteiros, não admitem uma resposta no âmbito de **Z**. É coerente indicar essa resposta por $\frac{19}{8}$, uma vez que se o primeiro número fosse 16 ela se exprimiria por $2 = \frac{16}{8}$. Cumpre então ampliar **Z** convenientemente de maneira

a poder abarcar todos os quocientes $\frac{a}{b}$ (a, b $\in \mathbf{Z}$, b $\neq$ 0) que possam surgir de questões da mesma natureza da que acabamos de lembrar.

Essa ampliação, tal como no caso de $\mathbb{N}$ para **Z**, pode ser feita de duas maneiras: elementarmente, agregando-se a **Z** os novos quocientes e definindo no conjunto resultante as operações e a relação de ordem convenientes; ou formalmente, construindo a partir de **Z** um novo conjunto, com os requisitos desejados, mas de tal modo que uma de suas partes possa ser identificada plenamente com **Z**. É claro que historicamente o caminho seguido foi o primeiro.

Optamos por fazer a construção formal do conjunto dos números racionais (a ampliação pretendida de **Z**) já no corpo do capítulo porque, além de um pouco menos penosa que a de **Z**, é mais difundida, mesmo em nível elementar, e portanto trata-se de algo certamente mais familiar ao leitor.

3. Números racionais: construção, operação e relação de ordem

Seja $\mathbf{Z}^* = \{m \in \mathbf{Z} \mid m \neq 0\}$ e consideremos sobre $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^* = \{(m, n) \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}^*\}$ a relação $\sim$ definida por

$$(m, n) \sim (p, q) \text{ se, e somente se, } mq = np$$

Para $\sim$ valem as três propriedades que caracterizam uma relação de equivalência, ou seja:

i $(m, n) \sim (m, n)$, para todo $(m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$ (reflexiva)
ii $(m, n) \sim (p, q) \Rightarrow (p, q) \sim (m, n)$ (simétrica)
iii $(m, n) \sim (p, q)$ e $(p, q) \sim (r, s) \Rightarrow (m, n) \sim (r, s)$ (transitiva)

Verifiquemos **iii** já que **i** e **ii** decorrem diretamente da definição de $\sim$. Por hipótese: mq = np e ps = qr. Multiplicando a primeira dessas igualdades por s e a segunda por n, resulta: mqs = nps e nps = nqr. Daí, mqs = nqr e portanto, cancelando q, o que é possível pois $q \in \mathbf{Z}^*$, obtém-se ms = nr. Donde $(m, n) \sim (r, s)$.

Logo a relação $\sim$ determina sobre $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$ uma partição em classes de equivalência. Para cada par $(m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$, a classe de equivalência à qual esse elemento pertence será indicada por $\frac{m}{n}$. Ou seja:

$$\frac{m}{n} = \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^* \mid (x, y) \sim (m, n)\} = \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^* \mid nx = my\}$$

Por exemplo:

$$\frac{1}{2} = \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^* \mid 2x = y\} = \{(1, 2); (-1, -2); (2, 4); (-2, -4); \ldots\}$$

Devido à propriedade reflexiva, é claro que $(m, n) \in \frac{m}{n}$, para todo $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Além disso, como

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \iff (m, n) \sim (r, s)$$

(resultado da teoria das relações de equivalência), então:

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \iff ms = nr$$

Por exemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{2}{4} = \frac{-2}{-4} = \dots$$

O conjunto quociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ por $\sim$, ou seja, o conjunto de todas as classes de equivalência determinada por $\sim$ sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, será designado por $\mathbb{Q}$. Logo:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,|\, (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}$$

Assim, cada $a \in \mathbb{Q}$ admite infinitas representações $\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}$; $n \in \mathbb{Z}^*$). Em cada uma delas m é o *numerador* e n o *denominador*. Dois elementos a, $b \in \mathbb{Q}$ sempre admitem representações de denominadores iguais. De fato, se $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$, então

$$\frac{m}{n} = \frac{ms}{ns} \text{ e } \frac{r}{s} = \frac{nr}{ns}$$

pois $m(ns) = n(ms)$ e $r(ns) = s(nr)$.

Os elementos de $\mathbb{Q}$ são chamados *números racionais* desde que se definam adição, multiplicação e relação de ordem, conforme o faremos nos itens seguintes.

3.1 Adição em $\mathbb{Q}$

DEFINIÇÃO 1 Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$. Chama-se *soma* de a com b e indica-se por a + b o elemento de $\mathbb{Q}$ definido da seguinte maneira:

$$a + b = \frac{ms}{ns} + \frac{nr}{ns} = \frac{ms + nr}{ns}$$

Mostremos que a soma a + b independe dos pares ordenados escolhidos para definir a e b. De fato, se $a = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ e $b = \frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$, então

$$mn' = nm' \text{ e } rs' = sr'$$

Multiplicando a primeira dessas igualdades por ss' e a segunda por nn' e somando membro a membro as relações obtidas

$$msn's' + rns'n' = nsm's' + nsr'n'$$

ou seja

$$(ms + rn)n's' = ns(m's' + r'n')$$

o que garante

$$\frac{ms + rn}{ns} = \frac{m's' + r'n'}{n's'}$$

Portanto a correspondência

$$(a, b) \to a + b,$$

conforme a definição 1, é uma aplicação e, portanto, trata-se de uma operação sobre $\mathbb{Q}$, à qual chamamos *adição em $\mathbb{Q}$*.

Para a adição em $\mathbb{Q}$ valem as seguintes propriedades:

a_1 $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ (associativa)

a_2 $a + b = b + a$, $\forall a, b, \in \mathbb{Q}$ (comutativa)

a_3 Existe elemento neutro: é a classe de equivalência $\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \dots$, que indicamos por 0 apenas. De fato

$$\frac{m}{n} + \frac{0}{1} = \frac{m \cdot 1 + 0 \cdot n}{n \cdot 1} = \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} = \frac{m}{n}$$

para todo $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

a_4 Todo $a \in \mathbb{Q}$ admite simétrico aditivo (oposto) em $\mathbb{Q}$: se $a = \frac{m}{n}$, então $-a = \frac{-m}{n}$, pois:

$$\frac{m}{n} + \frac{-m}{n} = \frac{mn + (-m)n}{nn} = \frac{0}{nn} = 0$$

Usaremos a notação $\mathbb{Q}^* = \{a \in \mathbb{Q} \,|\, a \neq 0\}$.

DEFINIÇÃO 2 Se a, b $\in \mathbb{Q}$, denomina-se *diferença* entre a e b, e indica-se por a − b, o seguinte elemento de $\mathbb{Q}$:

$$a - b = a + (-b)$$

Como $(-b) \in \mathbb{Q}$, para todo $b \in \mathbb{Q}$, então

$$(a, b) \rightarrow a - b$$

é uma operação sobre $\mathbb{Q}$, à qual chamamos *subtração* em $\mathbb{Q}$.

Tal como ocorre em **Z** (cap. III, 3.1), valem em $\mathbb{Q}$ as seguintes propriedades, envolvendo a idéia de oposto e de subtração:

- $-(a + b) = -a - b$
- $(a - b) + b = a$
- $a + x = b \iff x = b - a$
- $a + b = a + c \Rightarrow b = c$

Para demonstrá-las, o procedimento pode ser o mesmo usado para **Z**.

3.2 Multiplicação em $\mathbb{Q}$

DEFINIÇÃO 3 Chamamos *produto* de $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ por $b = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ o elemento

$$ab = a \cdot b = \frac{mr}{ns} \in \mathbb{Q}$$

o qual, pode-se mostrar (tal como foi feito para a soma em 3.1), não depende das particulares representações tomadas para a e b.

A *multiplicação* em $\mathbb{Q}$ é a operação definida por

$$(a, b) \longrightarrow ab$$

para quaisquer a, b $\in \mathbb{Q}$.

Valem as seguintes propriedades:

$\mathbf{m_1}$ $a(bc) = (ab)c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ (associativa)

$\mathbf{m_2}$ $ab = ba$, $\forall a, b, \in \mathbb{Q}$ (comutativa)

$\mathbf{m_3}$ Existe elemento neutro: é a classe

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \ldots$$

que indicamos simplesmente por 1. De fato:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} = \frac{m}{n}$$

para todo $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

$\mathbf{m_4}$ Todo $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, admite simétrico multiplicativo (inverso): se

$$a = \frac{m}{n}$$

então $m \neq 0$ e daí $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ e portanto

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{mn}{nm} = 1$$

Indicando por a^{-1}, como é praxe, o inverso de a, então

$$a = \frac{m}{n}, a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} = \frac{n}{m}$$

Disso decorre também que se $a \neq 0$:

$$(a^{-1})^{-1} = \left(\frac{n}{m}\right)^{-1} = \frac{m}{n} = a$$

Outro fato importante no que se refere aos inversos é que se a e b são elementos não nulos:

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$

De fato, como

$$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = (aa^{-1})(bb^{-1}) = 1$$

então efetivamente $a^{-1}b^{-1}$ é o inverso de ab.

d A multiplicação é distributiva em relação à adição:

$$a(b + c) = ab + ac, \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$$

Nota (sobre a noção de *corpo*): Suponhamos que sobre um conjunto $K \neq \varnothing$ estejam definidas uma "adição" e uma "multiplicação", a primeira (segunda) associando a cada par de elementos $a, b \in K$ um único elemento, também de K, que se indica por $a + b$ (respectivamente ab ou $a \cdot b$) chamado soma de a com b (respectivamente, produto de a por b), de modo que:

i $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in K$ (valem as propriedades associativas).

ii $a + b = b + a$ e $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in K$ (valem as propriedades comutativas).

iii Existem elementos $u, e \in K$ de modo que $a + u = a$ ($\forall a \in K$) e $a \cdot e = a$ ($\forall a \in K$), ou seja, existem elementos neutros para ambas as operações. Para facilitar a notação é comum fazer $u = 0$ e $e = 1$.

iv Para todo $a \in K$ existe $a' \in K$, de modo que $a + a' = 0$ (todo $a \in K$ admite simétrico aditivo a'); e para todo $a \in K^* = K - \{0\}$ existe $a'' \in K$, para o qual se verifica $aa'' = 1$ (a'' é o simétrico multiplicativo de a). A notação usual para os simétricos é: $a' = -a$ e $a'' = a^{-1}$.

v para quaisquer $a, b, c \in K$

$$a(b + c) = ab + ac$$

(a multiplicação é distributiva em relação à adição).

Nessas condições diz-se que sobre K está definida uma *estrutura de corpo* ou, simplesmente, que K é um corpo. Essas designações são tiradas da álgebra. Note-se que todo corpo é um anel comutativo (ver exercício 364).

Logo, $\mathbb{Q}$ é um exemplo de corpo. Outro exemplo já visto neste texto é o do conjunto $\mathbf{Z}_m$, para m primo, com a adição e a multiplicação módulo m (Apêndice III, cap. III). No capítulo V estudaremos o corpo dos números reais.

Convém ainda destacar os seguintes resultados para a multiplicação em $\mathbb{Q}$:

- $a(b - c) = ab - ac$
- $a \cdot 0 = 0$
- $a(-b) = (-a)b = -(ab)$
- $(-a)(-b) = ab$

Todas essas propriedades podem ser provadas como as respectivas de $\mathbf{Z}$ (cap. III, 3.2).

- $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$

Prova: Supondo $a \neq 0$, então de $ab = 0$ decorre $a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0$. Como $a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1 \cdot b = b$, então $b = 0$.

- $(ab = ac$ e $a \neq 0) \Rightarrow b = c$

Prova: $ab = ac \Rightarrow ab + [-(ac)] = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow ab + a(-c) = 0 \Rightarrow a(b - c) = 0 \overset{(a \neq 0)}{\Rightarrow} b - c = 0 \Rightarrow b = c.$

Na verdade, as duas últimas propriedades (lei do anulamento do produto e lei do cancelamento da multiplicação) são logicamente equivalentes entre

si. A demonstração que acabamos de fazer mostra que a última lei citada é conseqüência da primeira. Quanto à recíproca, supondo $a \neq 0$ e $ab = 0$, como $0 = a \cdot 0$, então $ab = a \cdot 0$ e, pela hipótese, $b = 0$.

- Para todo $a \in \mathbb{Q}^*$: $ax = b \iff x = a^{-1}b$.

$\Rightarrow$ Da hipótese segue que $a^{-1}(ax) = a^{-1}b$. Mas $a^{-1}(ax) = (a^{-1}a)x = 1 \cdot x = x$. Logo $x = a^{-1}b$.

$\Leftarrow$ Como $x = a^{-1}b$, então

$$ax = a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = 1 \cdot b = b$$

DEFINIÇÃO 4 Entendemos por *divisão em $\mathbb{Q}$* a operação de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ em $\mathbb{Q}$ definida por

$$(a, b) \to ab^{-1}$$

O elemento ab^{-1} é chamado *quociente* de a por b e pode ser indicado por $a : b$.

Por exemplo, se $a = \frac{2}{3}$ e $b = \frac{1}{5}$, então:

$$a : b = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{1} = \frac{10}{3}$$

Para a divisão em $\mathbb{Q}$ vale a seguinte propriedade: se $a, b, c \in \mathbb{Q}$ e $c \neq 0$, então:

$$(a + b) : c = a : c + b : c$$

De fato, se $c = \frac{r}{s}$ ($r, s \in \mathbf{Z}^*$), então:

$$(a+b) : c = (a+b) \cdot \frac{s}{r} = a \cdot \frac{s}{r} + b \cdot \frac{s}{r} = a : \frac{r}{s} + b : \frac{r}{s} = a : c + b : c.$$

3.3 Somas e produtos de mais de dois elementos em $\mathbb{Q}$

A maneira de estender o conceito de soma e o de produto para n números racionais ($n > 2$) segue o procedimento de sempre em situações análogas. Se $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$ ($n > 2$), por recorrência definem-se

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + a_n \quad \text{e} \quad a_1 a_2 \ldots a_n = (a_1 a_2 \ldots a_{n-1}) a_n$$

ou, com os símbolos usuais de somatório e produtório:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) + a_n \quad \text{e} \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) a_n$$

Se fizermos, para n = 1,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \quad \text{e} \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1$$

torna-se mais fácil expressar (e até provar) algumas propriedades envolvendo n números racionais ($n \geqslant 1$). Destaquemos a generalização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (cuja demonstração é análoga à que foi feita no cap. III, 4.3, para $\mathbb{N}$): se $a, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{Q}$ ($n \geqslant 1$), então

$$a\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (ab_i)$$

Mas também podemos generalizar propriedades mais específicas de $\mathbb{Q}$. Por exemplo, se $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}^*$, então

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{-1}$$

ou seja, "o inverso de um produto de elementos não nulos é o produto dos inversos". De fato:

$$n = 1: \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{-1} = a_1^{-1} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{-1}$$

Vamos supor $\left(\prod_{i=1}^{r} a_i\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{r} a_i^{-1} \qquad (r \geqslant 1)$

$$n = r+1: \prod_{i=1}^{r+1} a_i^{-1} = \left(\prod_{i=1}^{r} a_i^{-1}\right) a_{r+1}^{-1} \overset{(*)}{=}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{r} a_i\right)^{-1} \cdot a_{r+1}^{-1} \overset{(**)}{=} \left[\left(\prod_{i=1}^{r} a_i\right) \cdot a_{r+1}\right]^{-1} = \left(\prod_{i=1}^{r+1} a_i\right)^{-1}$$

Note-se que em (*) usamos a hipótese de indução e que em (**) o fato de o resultado ser válido para n = 2, o que já havia sido demonstrado em 3.2.

Exemplo 1: Seja $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$. Para um inteiro m qualquer, entende-se por *potência* m-ésima de a o elemento $a^m \in \mathbb{Q}$ assim definido:

Se $m \geqslant 0$, recursivamente por

$$a^0 = 1$$
$$a^{m+1} = a^m \cdot a, \text{ sempre que } m \geqslant 0.$$

Se $m < 0$, então:

$$a^m = (a^{-1})^{-m}$$

Essa definição implica que, quando $m > 0$, então $a^m = a \cdot a \ldots a$ (m fatores).

Mostremos que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ para todo $a \in \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ e quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$.

Primeiro notemos que mesmo quando $n < 0$ vale $a^n \cdot a = a^{n+1}$ De fato, se $n < 0$, então $-n = p > 0$ e, portanto:

$$a^n \cdot a = (a^{-1})^p \cdot a = [(a^{-1})^{p-1} \cdot a^{-1}] \cdot a = (a^{-1})^{p-1} \cdot (a^{-1} \cdot a) =$$
$$= (a^{-1})^{p-1} = (a^{-1})^{-n-1} = (a^{-1})^{-(n+1)} = a^{n+1}$$

Suponhamos um dos expoentes positivo (digamos $n \geqslant 0$) e procedamos por indução sobre ele.

$$n = 0: a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0}$$

Suponhamos $r \geqslant 0$ e $a^m \cdot a^r = a^{m+r}$

$n = r + 1$:
$$a^m \cdot a^{r+1} = a^m \cdot (a^r \cdot a) = (a^m \cdot a^r) \cdot a = a^{m+r} \cdot a = a^{(m+r)+1} = a^{m+(r+1)}$$

Por último, se $m, n < 0$, então $m + n < 0$ e, portanto:

$$a^{m+n} = (a^{-1})^{-(m+n)} = (a^{-1})^{(-m)+(-n)} = (a^{-1})^{-m} \cdot (a^{-1})^{-n} = a^m \cdot a^n$$

Registremos ainda que, por definição, para todo $m \in \mathbb{N}^*$:

$$0^m = 0$$

Propomos como exercício a demonstração das seguintes propriedades:

- $(a^m)^n = a^{mn}$, $\forall a \in \mathbb{Q}^*$ e $\forall m, n \in \mathbb{Z}$
- $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n = a^{-n}$, $\forall a \in \mathbb{Q}^*$ e $\forall n \in \mathbb{Z}$.

3.4 Relação de ordem em $\mathbb{Q}$

Seja $a = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Como

$$a = \frac{m}{n} = \frac{-m}{-n}$$

pois $m(-n) = n(-m)$, então sempre podemos considerar, para todo $a \in \mathbb{Q}$, uma representação em que o denominador seja maior que zero (em $\mathbb{Z}$).

Por exemplo:

$$\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3} \text{ e } \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

DEFINIÇÃO 5 Sejam a e b elementos de $\mathbb{Q}$ e tomemos, para cada um deles, uma representação $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ em que o denominador seja estritamente positivo. Nessas condições, diz-se que a *é menor que ou igual a* b, e escreve-se $a \leqslant b$, se $ms \leqslant nr$ (obviamente esta última relação é considerada em $\mathbb{Z}$). Equivalentemente pode-se dizer que b *é maior que ou igual a* a e anotar $b \geqslant a$. Com as mesmas hipóteses, se $ms < nr$, diz-se que a *é menor que* b (notação: $a < b$) ou que b *é maior que a* (notação: $b > a$).

Por exemplo:

$$\frac{-2}{3} < \frac{1}{4} \text{ porque } -8 < 3$$

$$\frac{5}{6} > \frac{4}{5} \text{ porque } 25 > 24$$

Pode-se mostrar que a definição 5 não depende dos pares ordenados eventualmente escolhidos para expressar a e b.

Um elemento $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ onde $n > 0$, se diz *positivo* se $a \geqslant 0$. Lembrando que $0 = \frac{0}{1}$, então:

$$a \geqslant 0 \iff \frac{m}{n} \geqslant \frac{0}{1} \iff m \geqslant 0$$

Quando $a > 0$, o que equivale (supondo como sempre $n > 0$) a $m > 0$, a se diz *estritamente positivo*. Se $a \leqslant 0$ ($\iff m \leqslant 0$ se $n > 0$), diz-se que a é *negativo* e se $a < 0$ ($\iff m < 0$ se $n > 0$), então o elemento a é chamado *estritamente negativo*.

Exemplo 2: Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$. Mostremos que se $a > b$, então existe $h \in \mathbb{Q}$, $h > 0$, de maneira que $a = b + h$.

De fato, suponhamos $a = \frac{r}{s}$ e $b = \frac{t}{s}$, onde $s > 0$. Como

$$\frac{r}{s} > \frac{t}{s}$$

então $r > t$ (em $\mathbb{Z}$) e, portanto, existe $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, de modo que $r = t + n$.

Daí

$$\frac{r}{s} = \frac{t+n}{s} = \frac{t}{s} + \frac{n}{s}$$

onde

$$h = \frac{n}{s} > 0$$

pois $n > 0$.

Mostraremos a seguir que $\leqslant$, conforme definição 5, é uma relação de ordem total sobre $\mathbb{Q}$, compatível com a adição e a multiplicação definidas em 3.1 e 3.2. Para tanto admitiremos que todos os denominadores que intervierem nos enunciados das propriedades sejam inteiros estritamente positivos.

$\mathbf{O_1}$ $\frac{m}{n} \leqslant \frac{m}{n}$ (reflexiva)

Evidente, pois $mn \leqslant nm$

$\mathbf{O_2}$ $\frac{m}{n} \leqslant \frac{r}{s}$ e $\frac{r}{s} \leqslant \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{r}{s}$ (anti-simétrica)

Como $ms \leqslant nr$ e $rn \leqslant sm$ (em $\mathbb{Z}$), então $ms = nr$. Logo:

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$$

$\mathbf{O_3}$ $\frac{m}{n} \leqslant \frac{r}{s}$ e $\frac{r}{s} \leqslant \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{m}{n} \leqslant \frac{p}{q}$ (transitiva)

De fato, como $ms \leqslant nr$ e $rq \leqslant sp$, multiplicando a primeira dessas relações por $q > 0$ e a segunda por $n > 0$:

$$msq \leqslant nrq \text{ e } rqn \leqslant spn$$

Daí, usando a transitividade de $\leqslant$ em $\mathbb{Z}$,

$$msq \leqslant spn$$

E, uma vez que $s > 0$, pode-se concluir que

$$mq \leqslant pn$$

Logo:

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{p}{q}$$

$\mathbf{O_4}$ $\frac{m}{n} \leqslant \frac{r}{s}$ ou $\frac{r}{s} \leqslant \frac{m}{n}$

Evidente, pois em $\mathbb{Z}$: $ms \leqslant nr$ ou $nr \leqslant ms$.

Nota: As propriedades $\mathbf{O_1}$ a $\mathbf{O_4}$ garantem que $\leqslant$, conforme definição 5, é uma relação de ordem total sobre $\mathbb{Q}$.

O_5 $\frac{m}{n} \leqslant \frac{r}{s} \Rightarrow \frac{m}{n} + \frac{p}{q} \leqslant \frac{r}{s} + \frac{p}{q}$, para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($\leqslant$ é compatível com a adição de $\mathbb{Q}$).

De fato, como por hipótese $ms \leqslant nr$, então $msq^2 \leqslant nrq^2$, e daí:

$$msq^2 + pnsq \leqslant nrq^2 + pnsq$$

Ou seja:

$$(mq + pn)sq \leqslant nq(rq + ps)$$

Donde:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq} \leqslant \frac{rq + ps}{sq} = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}$$

O_6 $\frac{m}{n} \leqslant \frac{r}{s}$ e $0 \leqslant \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \leqslant \frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q}$ ($\leqslant$ é compatível com a multiplicação de $\mathbb{Q}$).

Por hipótese, $ms \leqslant nr$ e $p \geqslant 0$ (além de $n, s, q > 0$). Assim $pq \geqslant 0$ e portanto

$$(ms)(pq) \leqslant (nr)(pq)$$

ou

$$(mp)(sq) \leqslant (nq)(rp)$$

onde $sq > 0$ e $nq > 0$. Logo:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq} \leqslant \frac{rp}{sq} = \frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q}$$

Nota: Seja K um corpo e suponhamos que sobre K esteja definida uma relação $\leqslant$ tal que: **i** $a \leqslant a$ (reflexiva); **ii** $a \leqslant b$ e $b \leqslant a \Rightarrow a = b$ (anti-simétrica); **iii** $a \leqslant b$ e $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$ (transitiva); **iv** $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$, para quaisquer $a, b \in K$; **v** $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$, para todo $c \in K$ ($\leqslant$ é compatível com a adição de $\mathbb{Q}$); **vi** $a \leqslant b$ e $0 \leqslant c \Rightarrow ac \leqslant bc$ ($\leqslant$ é compatível com a multiplicação de $\mathbb{Q}$). Nessas condições diz-se que K é um *corpo ordenado*.

Portanto $\mathbb{Q}$ é um exemplo (evidentemente muito importante) de corpo ordenado. Porém o exemplo mais importante é o dos números reais — a ser focalizado no capítulo V.

Se K é um corpo ordenado e se $a, b \in K$, escreve-se $a < b$ para indicar que $a \leqslant b$ e $a \neq b$. (Esse conceito é coerente com a relação "x é menor que y" conforme definição 5.) Para a relação $<$ num corpo ordenado K, vale a *lei da tricotomia*: "Para quaisquer $x, y \in K$, ou $x = y$ ou $x < y$ ou $y < x$, exclusivamente". De fato a propriedade **iv** impõe que $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$; assim, se $x \neq y$, então $x < y$ ou $y < x$. Não se pode ter simultaneamente $x < y$ e $y < x$ pois isto equivale a ($x \leqslant y$ e $x \neq y$) e ($y \leqslant x$ e $y \neq x$), do que segue $x = y$ e $x \neq y$.

Outras propriedades:

As propriedades enunciadas a seguir, envolvendo as relações $\leqslant$, $>$ e $<$ sobre $\mathbb{Q}$, independem todas de m_4, razão pela qual podem ser demonstradas tal como as correspondentes de $\mathbb{Z}$.

Se, a, b, c, d, a_i, b_i indicam elementos genéricos de $\mathbb{Q}$, então:

- $a \leqslant b \iff 0 \leqslant b - a \iff -b \leqslant -a$
- $a < b \iff 0 < b - a \iff -b < -a$
- $a \leqslant b$ e $c \leqslant d \Rightarrow a + c \leqslant b + d$
- $a_i \leqslant b_i (i = 1, 2, \ldots, n) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i$
- Se $a_i \leqslant b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ e, para algum r, $1 \leqslant r \leqslant n$, $a_r < b_r$, então
$$\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{i=1}^{n} b_i$$
- *Regras de sinais*: **i** $a > 0$ e $b > 0 \Rightarrow ab > 0$; **ii** $a < 0$ e $b < 0 \Rightarrow ab > 0$ **iii** $a < 0$ e $b > 0 \Rightarrow ab < 0$
- $a^2 \geqslant 0$; $a^2 > 0$ sempre que $a \neq 0$
- $a < b$ e $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
- $a < b$ e $c < 0 \Rightarrow ac > bc$
- $ac \leqslant bc$ e $c > 0 \Rightarrow a \leqslant b$
- $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant 0$; $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0 \iff a_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

PROPOSIÇÃO 1 Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$:

i $(a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0)$ e $(a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0)$

ii $(0 < a < 1 \Rightarrow 1 < a^{-1})$ e $(1 < a \Rightarrow 0 < a^{-1} < 1)$

iii $0 < a < b \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$

iv $a < b < 0 \Rightarrow b^{-1} < a^{-1} < 0$

Demonstração:

i Como $a^{-1} \neq 0$, pois $a^{-1} \cdot a = 1$, então $(a^{-1})^2 > 0$. Desta relação e da hipótese $0 < a$ decorre:

$$0 \cdot (a^{-1})^2 < a \cdot (a^{-1})^2$$

Ou seja: $0 < a^{-1}$. Fica como exercício a demonstração da segunda parte.

ii Como $a^{-1} > 0$, em virtude de **i**, então multiplicando os termos de $0 < a < 1$ (hipótese) por a^{-1}:

$$0 \cdot a^{-1} < a \cdot a^{-1} < 1 \cdot a^{-1}$$

o que implica $0 < 1 < a^{-1}$. A demonstração da segunda parte é análoga.

iii Como $a^{-1} > 0$ e $b^{-1} > 0$ em virtude da primeira parte, então $a^{-1} \cdot b^{-1} > 0$. Multiplicando os termos de $0 < a < b$ (hipótese) por $a^{-1} \cdot b^{-1}$:

$$0 \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) < a \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) < b \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1})$$

Donde: $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

iv Fica como exercício. ■

3.5 Imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ (os inteiros como particulares números racionais)

Consideremos o número $2 \in \mathbb{Z}$ e o elemento

$$\frac{8}{4} = \{(2, 1); (-2, -1); (4, 2); (-4, -2); \ldots\}$$

por exemplo. É de se esperar, tendo em vista o objetivo da construção de $\mathbb{Q}$, que tais elementos possam ser identificados. Mas o que justificaria essa identificação se se trata de coisas que num primeiro exame se mostram muito diferentes?

Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definida por:

$$f(m) = \frac{m}{1}, \forall m \in \mathbb{Z}$$

Para essa aplicação vale o seguinte:

- $f(m) = f(n) \Rightarrow \frac{m}{1} = \frac{n}{1} \Rightarrow m = n$ e, portanto, f é injetora.
- Para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$f(m + n) = \frac{m + n}{1} = \frac{m}{1} + \frac{n}{1} = f(m) + f(n)$$

- Para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$

$$f(mn) = \frac{mn}{1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} = f(m) f(n)$$

- Se $m \leqslant n$, então:

$$f(m) = \frac{m}{1} \leqslant \frac{n}{1} = f(n)$$

Essas propriedades de f significam que a imagem de $\mathbb{Z}$ por f, ou seja

$$\text{Im}(f) = \left\{ \frac{m}{1} \middle| m \in \mathbb{Z} \right\}$$

pode ser vista como uma cópia de $\mathbb{Z}$. Devido a esse fato cada inteiro m se confunde com sua imagem $\frac{m}{1}$ $\left(\text{ou seja, } m = \frac{m}{1}\right)$ e portanto $\mathbb{Z}$ passa a ser identificado com Im(f). Como $\text{Im}(f) \subset \mathbb{Q}$, então $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Levando em conta que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, pode-se concluir que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. A função f é chamada *função imersão* de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$.

Isso posto, se $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, então:

$$m : n = \frac{m}{1} : \frac{n}{1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

Por outro lado, dado o número racional $\frac{m}{n}$, então:

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{1} : \frac{n}{1} = m : n$$

Por isso chamamos cada representação $\frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{Z}; n \neq 0)$ de um número racional dado de *fração ordinária* de numerador m e denominador n. Se $\text{mdc}(m, n) = 1$, a fração se diz *irredutível*.

Ademais, se m é múltiplo de n, digamos $m = nr$ $(r \in \mathbb{Z})$, então:

$$m : n = \frac{m}{n} = \frac{nr}{n} = \frac{r}{1} = r$$

Ou seja, a divisão de um inteiro m por um inteiro $n \neq 0$ não só é sempre possível em $\mathbb{Q}$ como, quando m é múltiplo de n, o resultado coincide com o que se teria em $\mathbb{Z}$.

O conjunto $\mathbb{Q}$, construído da maneira como o fizemos, com a adição, a multiplicação e a relação de ordem que definimos, é o *conjunto dos números racionais* e seus elementos, os *números racionais*, como já havíamos antecipado ao início deste parágrafo.

PROPOSIÇÃO 2 Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$, se $a < b$, então existe $c \in \mathbb{Q}$ para o qual vale $a < c < b$.

Demonstração: A hipótese $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$, implica que $a + a < a + b$ e $a + b < b + b$. Logo $a + a < a + b < b + b$. Mas

$$a + a = 1 \cdot a + 1 \cdot a = (1 + 1)a = 2a$$

e, analogamente, $b + b = 2b$. Logo:

$$2a < a + b < 2b$$

Multiplicando os termos dessa desigualdade por $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}(2a) < \frac{1}{2}(a + b) < \frac{1}{2}(2b)$$

Como

$$\frac{1}{2}(2a) = \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)a = 1 \cdot a = a$$

e, da mesma forma

$$\frac{1}{2}(2b) = b$$

então:

$$a < \frac{1}{2}(a + b) < b$$

Como

$$c = \frac{1}{2}(a + b) \in \mathbb{Q}$$

o teorema está demonstrado. ■

COROLÁRIO: O conjunto dos elementos estritamente positivos de $\mathbb{Q}$ não tem mínimo.

De fato, se $0 < a$, então

$$0 < \frac{1}{2}a < a$$ ■

Nota: Um corpo K se diz *denso* quando, para quaisquer $a, b \in K$, $a < b$ (o que significa $a \leqslant b$ e $a \neq b$), existe $c \in K$ de modo que $0 < c < b$. A proposição 2 mostra exatamente que o corpo ordenado $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso.

PROPOSIÇÃO 3 Se a e b são números racionais e se $b > 0$, então existe $n \in \mathbb{N}^*$ de maneira que $nb > a$.

Demonstração: Podemos supor

$$a = \frac{r}{s} \text{ e } b = \frac{t}{s}$$

onde $s > 0$ e $t > 0$ (pelo fato de $b > 0$). Como já vimos no capítulo III, 6.2, existe $n \in \mathbb{N}^*$ de modo que $nt > r$. Daí segue que $nts > sr$. Logo:

$$\frac{nt}{s} > \frac{r}{s}$$

Mas

$$n\frac{t}{s} = \frac{n}{1}\frac{t}{s} = \frac{nt}{s}$$

Assim:

$$n\frac{t}{s} > \frac{r}{s}$$

Ou seja: $nb > a$. ■

Nota: Um corpo ordenado K se diz *arquimediano* se, para quaisquer $a, b \in K$, $b > 0$, existe $n \in \mathbb{N}^*$ de maneira que

$$nb = b + b + \ldots + b > a \ (\Longleftrightarrow \ a < nb)$$

onde o número de parcelas iguais a b é evidentemente n. Assim, a proposição 3 nos assegura que o corpo ordenado $\mathbb{Q}$ dos números racionais é arquimediano.

EXERCÍCIOS

Nos exercícios deste capítulo usaremos as expressões "números racionais" e "frações ordinárias" com o mesmo significado.

365. Mostre que:

a) $\frac{1\,515}{3\,333} = \frac{15}{33}$ b) $\frac{131\,313}{999\,999} = \frac{13}{99}$ c) $\frac{2\,323}{9\,999} = \frac{23}{99}$

Resolução de a):

$$\frac{1\,515}{3\,333} = \frac{15 \cdot 100 + 15}{33 \cdot 100 + 33} = \frac{15 \cdot (100 + 1)}{33 \cdot (100 + 1)} = \frac{15}{33}$$