Representação decimal dos números racionais

Alexandre Kirilov Elen Messias Linck

21 de março de 2018

1 Introdução

Um número é racional se puder ser escrito na forma a/b, com a e b inteiros e $b \neq 0$; esta é a forma fracionária de um número racional. Fazendo a divisão de a por b obtemos a representação decimal do número racional.

A primeira coisa que observamos ao fazer tal divisão é que algumas vezes obtemos representações decimais finitas, por exemplo

$$1/2 = 0,5 \quad \text{e} \quad 12/25 = 0,48$$

e outras vezes obtemos representações infinitas e periódicas, como

$$1/3 = 0,333... \quad \text{e} \quad 22/39 = 0,564102\,564102...$$

A experiência com o uso de calculadoras, anos de escola e professores nos ensinando, nos diz que isso sempre acontece, ou seja, ao passar da forma fracionária para decimal teremos sempre um número finito de casas decimais ou uma dízima infinita e periódica.

Portanto achamos conveniente propor aqui algumas perguntas:

1. Por que representação decimal de um número racional é sempre finita ou infinita periódica?
2. É possível prever se a representação decimal de um número racional será finita ou infinita periódica olhando apenas para a fração? (antes de iniciar o processo de divisão)
3. Dada uma representação decimal qualquer, é sempre possível obter sua forma fracionária?
4. Sabemos que a representação fracionária não é única (devido às frações equivalentes); e a representação decimal, ela é única?
5. O que podemos dizer a respeito das representações decimais infinitas não periódicas?

Vamos responder a cada uma dessas perguntas, começando pela situação mais simples: representações decimais finitas.

2 Representação decimal finita

A partir dos exemplos

$$0,5 = \frac{5}{10} \qquad 0,17 = \frac{17}{100} \quad \text{e} \quad 0,8625 = \frac{8625}{10000}$$

notamos que é simples transformar um número com uma quantidade finita de casas decimais em numa fração com numerador inteiro e denominador igual a uma potência de 10. Simplificando cada uma das frações acima obtemos sua forma irredutível

$$0,5 = \frac{1}{2} \qquad 0,17 = \frac{17}{100} \quad \text{e} \quad 0,8625 = \frac{69}{80}$$

O denominador da fração irredutível, assim como o da fração original, tem apenas os fatores primos 2 e 5 (provenientes das potências de $10 = 2 \times 5$ que ali estavam antes de efetuarmos a simplificação).

Com base nesses exemplos podemos intuir que, ao nos deparamos com números racionais cuja decomposição do denominador em fatores primos apareça apenas os fatores primos 2 e 5, poderemos "completar" essa decomposição de modo a obter alguma potência de 10. Por exemplo:

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{2^2.5} = \frac{1}{2^2.5} \cdot \frac{5}{5} = \frac{5}{2^2.5^2} = \frac{5}{100} = 0,05$$

$$\frac{3}{16} = \frac{3}{2^4} = \frac{3}{2^4} \cdot \frac{5^4}{5^4} = \frac{3.5^4}{2^4.5^4} = \frac{1875}{10000} = 0,1875$$

Aparentemente, o fato mais importante aqui é que o denominador não tenha fatores primos diferentes de 2 e 5, pois a decomposição do número 10 em fatores primos contém apenas esses dois fatores. Entretanto no exemplo $273/140 = 1,95$ temos $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$.

- Por que isso não contradiz o que fizemos logo acima?
- Que hipótese deve ser adicionada no argumento acima para garantir que a forma decimal de um número racional seja sempre finita?

Tente responder essas duas questões antes de prosseguir. Pensar em outros exemplos mais simples pode te ajudar a encontrar a resposta ($3/6 = 0,5, 14/35 = 0,4$).

Nosso primeiro teorema é a generalização dessa discussão.

Teorema 2.1. *Um número racional possui representação decimal finita se e somente se quando escrito na forma irredutível, a decomposição em fatores primos de seu denominador possui apenas os fatores 2 ou 5.*

Demonstração: Seja r um número com uma quantidade finita de casas decimais, ou seja,

$$r = s + 0, t_1 t_2 t_3 ... t_n,$$

aqui $s \in \mathbb{Z}$ é a parte inteira e cada t_j é uma casa decimal de r, ou seja, cada t_j é um número natural entre 0 e 9. Vamos provar que r possui uma representação em forma de fração na qual o denominador é da forma $2^r 5^s$, para algum $r, s \in \mathbb{N}$.

Note que, se todas as casas decimais são nulas, então $r = s$ é um número inteiro e podemos escrevê-lo na forma fracionária

$$r = \frac{r}{2^0 5^0}.$$

Logo podemos supor que pelo menos uma casa decimal é diferente de zero, ou seja, que $t_n \neq 0$. Neste caso

$$0, t_1 t_2 t_3 ... t_n \times 10^n = t_1 t_2 t_3 ... t_n \quad \Rightarrow \quad 0, t_1 t_2 t_3 ... t_n = \frac{t_1 t_2 t_3 ... t_n}{10^n}$$

e assim

$$r = s + 0, t_1 t_2 t_3 ... t_n = s + \frac{t_1 t_2 t_3 ... t_n}{10^n} = \frac{s \times 10^n + t_1 t_2 t_3 ... t_n}{2^n 5^n}$$

Chegamos assim a uma representação fracionária de r com numerador inteiro e denominador da forma $2^n 5^n$.

Convém observar que para obter a forma irredutível da última fração acima talvez seja necessário simplificar certa quantidade de fatores primos comuns ao numerador e denominador, porém no denominador restarão apenas potências dos fatores 2 ou 5.

Reciprocamente, se a/b é uma fração irredutível com $a \in \mathbb{Z}$, $b = 2^p 5^q$ e $p, q \in \mathbb{N}$, supondo $p \geq q$ temos

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^p 5^q} = \frac{a}{2^p 5^q} \cdot \frac{5^{p-q}}{5^{p-q}} = \frac{a \times 5^{p-q}}{10^p}$$

e daqui podemos concluir que a representação decimal de a/b possui p casas decimais. O caso $p < q$ é análogo, o que conclui a prova do teorema. $\square$

Corolário 2.2. *Um número racional possui representação decimal infinita se e somente se quando escrito na forma irredutível, a decomposição em fatores primos do denominador possui algum fator primo diferente de 2 e 5.*

Note que este corolário é simplesmente a negação lógica do teorema 2.1, logo não podemos afirmar nada a respeito da periodicidade da dízima, nem mesmo quando é possível transformar uma representação decimal infinita para a forma fracionária.

Os resultados dessa seção nos dizem apenas o seguinte: partindo de um número racional (escrito em sua forma fracionária irredutível), basta olhar a decomposição do denominador em fatores primos para saber se sua representação decimal será finita ou infinita.

3 Representação decimal infinita periódica

Vamos começar analisando um exemplo no qual exploramos o processo de divisão por 7, para entender porque aparecem dízimas periódicas.

$$\begin{array}{l|l}
50,000000 & \underline{\;7\qquad\qquad\qquad} \\
10 & 7,14285... \\
\;\;30 & \\
\;\;\;\;20 & \\
\;\;\;\;\;\;60 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;40 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;5 &
\end{array}$$

Em palavras: na divisão de 50 por 7 obtemos o quociente 7 e o resto 1. Como não é possível dividir 1 por 7, passamos a dividir 10 décimos por 7 (o que justifica a necessidade de colocar uma vírgula após o 7 e um zero após o 1 no algoritmo de divisão).

Nesse segundo passo, divisão de 10 por 7, obtemos o quociente 1 e o resto 3. Nas divisões seguintes obtemos, sucessivamente, os restos 2, 6, 4 e 5.

No momento em que obtemos o resto 5 completamos um ciclo, pois o próximo passo seria dividir 50 por 7, o que já ocorreu antes. Portanto os algarismos do quociente voltarão a se repetir na mesma ordem de antes, caracterizando a dízima periódica.

$$\frac{50}{7} = 7,142857\ 142857...$$

Note que, no processo de divisão por 7 os restos possíveis são: $0, 1, 2, 3, 4, 5$ e 6.

- Quando ocorre o resto zero, o processo de divisão é encerrado e a representação decimal obtida é finita. Por exemplo: $91/7 = 13$.
- Caso contrário, se o resto zero jamais ocorrer, restarão apenas seis possíveis restos em um processo de divisão (de 1 a 6). Logo ao calcularmos o sétimo resto em um processo de divisão devemos repetir algum dos seis possíveis restos anteriores.

Conclusão: no processo de divisão por 7 obteremos uma dízima finita ou uma dízima periódica com no máximo seis algarismos.

Outros exemplos interessantes são:

$$\frac{5011}{495} = 10,1\,23\,23... \qquad \frac{41111}{333000} = 0,123\,456\,456\,456...$$

Observação 3.1. As expressões "representação decimal" e dízima têm o mesmo significado para nós e as usaremos indistintamente.

Definição 3.2. Diremos que uma representação decimal infinita é uma dízima periódica quando tal dízima puder ser escrita na forma

$$a, b_1b_2b_3...b_m\ \overline{p_1p_2p_3...p_n}$$

aqui:

- ▷ $a \in \mathbb{Z}$ é a parte inteira da dízima;
- ▷ $b_i, p_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ são os algarismos da parte decimal da dízima;
- ▷ $b_1b_2b_3...b_m$ é a parte decimal não periódica da dízima;
- ▷ $\overline{p_1p_2p_3...p_n} \doteq p_1p_2p_3...p_np_1p_2p_3...p_n...$ é a parte decimal periódica, a qual chamaremos de período da dízima.

Com essa notação os exemplos acima podem ser reescritos na forma:

$$\frac{5011}{495} = 10,1\overline{23}, \qquad \frac{41111}{333000} = 0,123\overline{456} \quad \text{e} \quad \frac{50}{7} = 7,\overline{142857}$$

O próximo resultado é simplesmente a generalização do exemplo de divisão por 7 usado para iniciar essa seção. Sua demonstração segue as mesmas ideias e parece mais complicada porque está usando uma notação mais carregada. Não se assuste com a notação, mantenha em mente um exemplo e veja que seguimos o mesmo roteiro das justificativas acima.

Teorema 3.3. *Seja a/b a forma irredutível de um número racional. Se a decomposição de b em fatores primos contém fatores diferentes de 2 e 5, então sua representação decimal é uma dízima periódica. Além disso, o período possui no máximo $b-1$ algarismos.*

Demonstração: Pelo corolário 2.2, sabemos que a representação decimal de a/b é infinita. Resta mostrar que é periódica.

Seja r_1 o resto da divisão de a por b. Note que $r_1 \neq 0$, caso contrário a divisão resultaria em um número inteiro (dízima finita) contrariando o que foi dito no parágrafo anterior. Dessa forma, $1 \leq r_1 \leq b-1$.

O próximo passo no algoritmo da divisão é dividir $r_1 \cdot 10^k$ por b (aqui k é o menor número natural tal que $r_1 \cdot 10^k > b$). Nesse passo obtemos um novo resto r_2, com $1 \leq r_2 \leq b-1$.

Continuando com o processo de divisão acima obtemos a sequência de restos

$$r_1, r_2, r_3, ..., r_{b-1}, r_b, \text{ com } 1 \leq r_j \leq b-1 \text{ para todo } j = 1, 2 \ldots, b.$$

Como há apenas $b-1$ possibilidades de restos diferentes para esta divisão, então o resto r_b já apareceu pelo menos uma vez na sequência $r_1, r_2, r_3, ..., r_{b-1}$. Isso garante que o processo de divisão entrou em um ciclo de repetição e que o comprimento do período é de no máximo $b-1$ casas decimais. □

4 Representação decimal × forma fracionária

Nas seções anteriores vimos que todo número racional possui uma representação decimal finita ou infinita periódica (Teoremas 2.1 e 3.3). Nesta seção mostraremos que a afirmação recíproca também é verdadeira, ou seja, que a cada dízima finita ou infinita periódica é possível associar um número racional.

Primeiramente devemos recordar que parte dessa recíproca já foi provada no teorema 2.1, pois foi mostrado que a cada representação decimal finita podemos associar uma fração cujo denominador é uma potência de 10.

A ideia é bastante simples e fica clara no seguinte exemplo:

$$13,54 \times 100 = 1354 \quad \Rightarrow \quad 13,54 = \frac{1354}{100}$$

No caso geral, dada uma representação decimal finita com m casas decimais

$$r = a, b_1 b_2 ... b_m = a + 0, b_1 b_2 ... b_m$$

multiplicarmos esta expressão por 10^m e obtemos

$$10^m r = 10^m a + b_1 b_2 ... b_m \quad \Rightarrow \quad r = \frac{10^m a + b_1 b_2 ... b_m}{10^m}.$$

Vejamos agora como transformar uma representação decimal infinita periódica em uma fração ordinária analisando um exemplo. Considere a seguinte dízima periódica:

$$r = 0,123\overline{456}$$

A ideia aqui é multiplicar r por duas potências de 10 diferentes, que são convenientemente escolhidas com o objetivo de "isolar" o período na parte decimal. Assim, quando subtrairmos os resultados obtidos, a parte decimal desaparecerá.

Neste exemplo vamos multiplicar primeiramente por 10^6, depois por 10^3 obtendo

$$10^6 r = 123456,\overline{456} \quad \text{e} \quad 10^3 r = 123,\overline{456}$$

subtraindo teremos

$$(10^6 - 10^3)r = 123456,\overline{456} - 123,\overline{456}$$

ou seja

$$10^3(10^3 - 1)r = 123333 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{123333}{999000},$$

logo r é um número racional.

Vamos repetir o argumento usado acima para o caso geral. Seja r uma dízima periódica $(0 \leqslant r < 1)$, como na definição 3.2, ou seja

$$r = 0, b_1 b_2 ... b_m \overline{p_1 p_2 ... p_n},$$

multiplicando r primeiro por 10^{m+n} e depois por 10^m obtemos as expressões

$$\begin{aligned} 10^{m+n} r = &\quad b_1 b_2 ... b_m p_1 p_2 ... p_n, \overline{p_1 p_2 ... p_n}, \\ 10^m r = &\qquad\qquad b_1 b_2 ... b_m, \overline{p_1 p_2 ... p_n} \end{aligned}$$

subtraindo a segunda da primeira temos

$$(10^{m+n} - 10^m)r = b_1 b_2 ... b_m p_1 p_2 ... p_n, \overline{p_1 p_2 ... p_n} - b_1 b_2 ... b_m, \overline{p_1 p_2 ... p_n}$$

ou seja

$$r = \frac{b_1 b_2 ... b_m p_1 p_2 ... p_n - a b_1 b_2 ... b_m}{10^m (10^n - 1)}.$$

Como r é uma dízima periódica, então $n \geq 1$ e o denominador da fração acima $10^n - 1 \neq 0$. Logo r é um número racional.

No caso em que $r = a, b_1 b_2 ... b_m \overline{p_1 p_2 ... p_n} \notin [0, 1)$, basta escrever

$$r = a + 0, b_1 b_2 ... b_m \overline{p_1 p_2 ... p_n} = a + \frac{b_1 b_2 ... b_m p_1 p_2 ... p_n - a b_1 b_2 ... b_m}{10^m (10^n - 1)}.$$

A soma dos dois racionais acima fornece a representação de r como quociente de dois inteiros. Assim acabamos de demonstrar o seguinte proposição:

Proposição 4.1. *A qualquer dízima finita ou infinita periódica r é possível associar um número racional cuja representação decimal é r.*

Finalmente podemos enunciar um teorema que reune todos os resultados demonstrados até aqui e caracteriza completamente a representação decimal de um número racional.

Teorema 4.2. *Um número é racional se e somente se sua representação decimal é finita ou infinita periódica.*

5 Unicidade de representação

Considere o seguinte exemplo, bastante difundido entre apreciadores de matemática,

$$r = 0,999...$$

Para obter uma expressão fracionária para r, multiplicamos a expressão acima por 10 obtendo

$$10r = 9,999...$$

subtraindo as duas expressões acima vem

$$9r = 9 \quad \Rightarrow \quad r = 1,$$

ou seja,

$$1 = 0,999...$$

Esta igualdade pode ser convenientemente usada para escrever as representações decimais finitas de uma forma diferente.

Dividindo a expressão $1 = 0,999...$ por 10 repetidamente obtemos as igualdades:

$$\begin{aligned} 0,1 &= 0,0999... \\ 0,01 &= 0,00999... \\ 0,001 &= 0,000999... \\ 0,0001 &= 0,0000999... \end{aligned}$$

A seguir usamos essas igualdades para escrever algumas identidades curiosas

$$\begin{aligned} 1,58 &= 1,57 + 0,01 = 1,57 + 0,00999... = 1,579999... \\ 7,3285 &= 7,3284 + 0,0001 = 7,3284 + 0,0000999... = 7,3284999... \\ -0,2 &= -0,3 + 0,1 = -0,3 + 0,0999... = -0,2999... \end{aligned}$$

Observação 5.1. Note que os números racionais do exemplo acima admitem duas formas decimais infinitas diferentes, por exemplo,

$$1,58000.... \quad \text{e} \quad 1,579999...$$

Ao falarmos da representação decimal infinita periódica, estaremos sempre nos referindo da segunda forma acima. A primeira continuará a ser tratada como dízima finita.

Proposição 5.2. *Todo número racional admite uma representação decimal infinita periódica.*

Demonstração: Dado um número racional qualquer, se sua forma fracionária irredutível possui denominador com fatores primos distintos de 2 e 5, não há nada a provar. Caso contrário, sua representação decimal é finita, digamos

$$a, b_1b_2...b_m = a + 0, b_1b_2...b_m, \quad \text{com } b_m \neq 0.$$

Vamos provar que $0, b_1b_2...b_m = 0, b_1b_2...(b_m - 1)999...$

Seja

$$r = 0, b_1 b_2 ... (b_m - 1)\overline{9},$$

multiplicando essa expressão primeiro por 10^{m+1} e depois por 10^m obtemos as expressões:

$$\begin{aligned} 10^{m+1} r &= b_1 b_2 ... (b_m - 1) 9, \overline{9} \\ 10^m r &= b_1 b_2 ... (b_m - 1), \overline{9} \end{aligned}$$

subtraindo a segunda expressão da primeira temos

$$(10^{m+1} - 10^m) r = b_1 b_2 ... (b_m - 1) 9, \overline{9} - a b_1 b_2 ... (b_m - 1), \overline{9}$$

ou seja

$$9 \times 10^m r = b_1 b_2 ... (b_m - 1) 9 - b_1 b_2 ... (b_m - 1)$$

somando e subtraindo o número inteiro 1 no lado direito da expressão acima não alteraremos seu valor, e podemos reescrevê-la da seguinte forma

$$\begin{aligned} 9 \times 10^m r &= (b_1 b_2 ... (b_m - 1) 9 + 1) - (b_1 b_2 ... (b_m - 1) + 1) \\ &= 10 \times b_1 b_2 ... b_m - b_1 b_2 ... b_m = 9 \times b_1 b_2 ... b_m \end{aligned}$$

Logo

$$r = \frac{b_1 b_2 ... b_m}{10^m} \Rightarrow r = 0, b_1 b_2 ... b_m.$$

O que conclui a demonstração do resultado. □

E com isso podemos reescrever o teorema 4.2 na seguinte forma

Teorema 5.3. *Um número é racional se e somente se admite uma representação decimal infinita periódica.*

Finalmente, vamos provar que essa representação decimal infinita periódica é única.

Teorema 5.4. *A representação decimal infinita periódica de um número racional é única.*

Demonstração: Suponha que exista um número racional $r (o \leqslant r < 1)$ que admite duas representações decimais infinitas periódicas distintas.

Neste caso podemos escrever

$$r = 0, b_1 b_2 b_3 ... \quad \text{e} \quad r = 0, c_1 c_2 c_3 ...$$

como as dízimas periódicas acima são distintas, então existe um menor k tal que $b_k \neq c_k$.

Se $b_k < c_k$ temos

$$\begin{aligned} r &= 0, b_1 b_2 b_3 ... b_k b_{k+1} ... < 0, b_1 b_2 b_3 ... c_k \\ &= 0, c_1 c_2 c_3 ... c_k < 0, c_1 c_2 c_3 ... c_k c_{k+1} ... = r. \end{aligned}$$

O que é uma contradição. A prova para $b_k > c_k$ é análoga. Portanto todo número racional admite uma única representação decimal infinita periódica. □