$1^{\underline{a}}$ Prova de Fundamentos de Análise - 04/09/2023 - Noturno

Essa prova é composta de duas partes:

Parte 1: Entregue 4 questões resolvidas até às 21h. Faça apenas duas questões de cada seção abaixo.

Parte 2: Envie a resolução de todas as questões até às 24h de sexta-feira, 08/09, para o endereço: fundamentos.analise.ufpr@gmail.com

Números Naturais e Inteiros

1. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, tais que $a \leq b$ e $c \leq d$.
   a. Mostre, por indução, que $ac \leq bc$;
   b. Usando o resultado provado no item a., mostre que $ac \leq bd$.

2. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Usando apenas os axiomas de Peano e as definições de adição e multiplicação de números naturais mostre que
   a. Se $a + b = 0$, prove que $a = 0$ e $b = 0$.
   b. Se $a \cdot b = 0$, prove que $a = 0$ ou $b = 0$;

3. Defina a relação de ordem " $\leq$ " no conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros e use esta definição para provar que esta relação de ordem é compatível com a adição e a multiplicação usual de $\mathbb{Z}$. Ou seja, que se $m, n \in \mathbb{Z}$ e $m \leq n$ então
   a. $m + p \leq n + p$, para todo $p \in \mathbb{Z}$;
   b. $mp \leq np$, para todo $p \in \mathbb{Z}_+$;

Números Racionais e Irracionais

4. Faça o que se pede:
   a. Dados $a = 2,12310101010...$ e $b = -1,67001001001...$, escreva a representação decimal de $a+b$. Justifique todos os seus argumentos.
   b. Defina número irracional e use sua definição para construir um número irracional α tal que $1,00001 < \alpha < 1,00002$;

5. Faça o que se pede:
   a. Seja r um número racional cuja a representação decimal possui apenas uma quantidade finita de casas decimais. Prove que este número pode ser escrito na forma a/b, sendo b um número inteiro positivo cuja decomposição em fatores primos possui apenas os fatores 2 e 5.
   b. Enuncie precisamente a recíproca do resultado acima e a demonstre.

6. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Mostre que:
   a. $a + b\sqrt{2}$ é um número irracional;
   b. $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$
   c. Defina uma adição e uma multiplicação no conjunto $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ que torne este conjunto fechado em relação a estas duas operações.