2ª Prova de Fundamentos de Análise - 09/10/2023 - Noite

Essa prova é composta de duas partes:

1: Entregue 4 questões resolvidas até às 21h (pelo menos uma questão de cada seção abaixo).

2: Envie a resolução escaneada, em PDF, de todas as questões até às 24h de sexta-feira, 13/10, para o e-mail: fundamentos.analise.ufpr@gmail.com.

Cortes de Dedekind

1. Primeiro defina corretamente cortes de Dedekind. A seguir, verifique se os conjuntos abaixo são cortes:

   (a) $J = \{x \in \mathbb{Q}; x < 0\}$.

   (b) $K = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2\}$.

   (c) $L = \{x \in \mathbb{Q}; x \leq 1\}$.

2. Se J e L são cortes com $J < L$, prove que existe um número racional r tal que $J < K(r) < L$.

3. Sejam $J > 0$ um corte de Dedekind e $\epsilon > 0$ um número racional. Mostre que existem $a \in J$ e $b \in \mathbb{Q} \setminus J$ tais que $b - a < \epsilon$.

Conjuntos finitos e infinitos

4. Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto qualquer. Prove que existe uma função crescente $f : \mathbb{N} \to X$.

5. Mostre que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. A seguir, use este resultado para provar que o conjunto dos números racionais positivos é enumerável.

6. Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto qualquer. Mostre que X é finito se e somente se X é limitado.

Corpos ordenados

7. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado qualquer e $a, b \in \mathbb{K}$. Mostre que:

   (a) $|a + b| \leq |a| + |b|$

   (b) $|a| - |b| \leq |a - b|$

8. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}_+$ conjuntos limitados não vazios. Mostre que:

   (a) $AB = \{ab;\ a \in A \text{ e } b \in B\}$ é um conjunto limitado

   (b) $\sup(AB) \leqslant (\sup A)(\sup B)$;

9. Sejam $f, g : [0, 1] \to [0, +\infty)$ funções limitadas. Mostre que:

   (a) $f + g$ é limitada;

   (b) $\sup(f + g) \leqslant (\sup f) + (\sup g)$;

   (c) Dê um exemplo no qual a desigualdade acima ocorre estritamente e um exemplo em que ocorre a igualdade.

Recordando: $f + g$ é a soma usual de funções, ou seja $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x \in [0, 1]$. E o supremo de uma função é $\sup(f) = \sup\{f(x); x \in [0, 1]\}$.